



**KRYTERIA DEFINICYJNE NIŻÓWKI I ICH WPŁYW NA  
WŁASNOŚCI CHARAKTERYSTYK NIŻÓWKI.  
2. JEDNOWYMIAROWE ROZKŁADY  
PRAWDOPODOBIENSTWA**

*Stanisław Węglarczyk, Katarzyna Baran-Gurgul*  
*Politechnika Krakowska*

***DROUGHT DEFINITION CRITERIA AND THEIR  
INFLUENCE ON THE DROUGHT CHARACTERISTICS.  
2. ONE-DIMENSIONAL PROBABILITY DISTRIBUTIONS***

*Streszczenie*

Dla przyjętych 12 definicji niżówki znaleziono na podstawie 49-letnich szeregów czasowych dobowych przepływów w czterech wodowskazach w zlewni Małej Wisły, że rozkłady prawdopodobieństwa czasu  $T$  trwania niżówki oraz deficytu  $V$  niżówki mogą być opisane rozkładem logarytmiczno-normalnym z parametrami estymowanymi metodą największej wiarygodności. Jakość dopasowania badana była dwoma testami zgodności: testem Andersona-Darlinga i testem Craméra-von Misesa. Oba testy pozwalały na przyjęcie badanego rozkładu niezależnie od przyjętej definicji i wodowskazu, gdyż wartości  $p$  ( $p$ -values) pierwszego testu były wyższe od 15%, drugiego – większe od 20%.

**Słowa kluczowe:** niżówka, definicja niżówki, czas trwania niżówki, deficyt niżówki, rozkład lognormalny, test Andersona-Darlinga, test Craméra-von Misesa

### Summary

*For adopted 12 drought definitions and basing on 49-year time series of daily flows at four cross-sections in the Mała Wisła catchment, it was found that the probability distributions of drought duration  $T$  and drought deficit  $V$  may be described by the lognormal distribution with parameters estimated by the maximum likelihood method. The goodness-of-fit quality was tested by the Anderson-Darling and Cramér-von Mises tests. Both test did not reject the tested distribution neither for any definition nor any cross-section, as the  $p$ -values were greater than 15% for the former test and greater than 20% for the latter.*

**Key words:** *drought, drought definition, drought duration, drought deficit, lognormal probability distribution, Anderson-Darling test, Cramér-von Mises test*

### WSTĘP

Niżówka – okres czasu charakteryzujący się przepływami przeważnie niższymi od zadanego – może być charakteryzowana różnymi wielkościami. Niewątpliwie najczęściej stosowane są dwie: czas trwania  $T$  oraz deficyt  $V$ . Wielkości te zależą od definicji niżówki i są traktowane jako zmienne losowe, tzn. poszukiwany jest ich rozkład prawdopodobieństwa. W poprzedniej pracy (Węglarczyk S., 2014) zbadany został problem stacjonarności charakterystyk niżówek w zlewni Małej Wisły w zależności od definicji niżówki i stwierdzono, że w większości przypadków charakterystyki te można traktować jak zmienne losowe niezależne od czasu rozpoczęcia niżówki.

Przyjęta definicja niżówki opierała się na trzech wartościach:  $p$ ,  $T_{min}$ ,  $\tau_{min}$ . Pierwsza z nich oznacza średni procent czasu (liczby dni) w roku z przepływem nie mniejszym od  $Q_p$  lub, inaczej, gwarancję przepływu i definiuje przepływ graniczny. Nieprzerwany okres czasu z przepływami poniżej przyjętej wartości granicznej  $Q_p$  to niżówka. Jednakże bardzo krótkie niżówki nie mają znaczenia jako okres braku wody, stąd zwykle przyjmowany jest minimalny czas  $T_{min}$  trwania niżówki; niżówki trwające krócej są usuwane. Z drugiej strony, jeśli okres czasu pomiędzy kolejnymi niżówkami jest bardzo krótki, niżówki takie są traktowane jak niżówki zależne, tj. mające *de facto* tę samą przyczynę, i łączone w jedną. Do tego celu przyjmowany jest minimalny okres czasu  $\tau_{min}$  pomiędzy kolejnymi niżówkami. W pracy niniejszej przyjęto 4 wartości  $p$  spośród spotykanych w literaturze przedmiotu (Zelenhasić E. i Salvai A., 1987; Tallaksen L. M. i Hisdal H., 1997; Stahl K., 2001; Fleig A., 2004; Jakubowski W., 2011; Kaznowska E. i Banasik K., 2011; Tallaksen L. M., Stahl K., Wong G., 2011; Tomaszewski E.,

2011; Tokarczyk T., 2013):  $p = 60, 70, 80$  i  $90\%$ , oraz trzy pary wartości minimalnych  $(T_{min}, \tau_{min})$ : (7;7), (14;7) i (14;14) dni. Łącznie wartości  $p$  i  $(T_{min}, \tau_{min})$  dawały  $4 \times 3 = 12$  definicji niżówki.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie, czy jeden z najczęściej stosowanych w takich przypadkach rozkładów prawdopodobieństwa, tj. rozkład logarymiczno-normalny (Cancelliere A., 2003), może być użyty do opisanego rozkładu prawdopodobieństwa wybranych charakterystyk niżówek w zlewni Małej Wisły dla przyjętych definicji niżówki.

## WYKORZYSTANE DANE I METODA IDENTYFIKACJI I WERYFIKACJI ROZKŁADU

Wzięte do analizy dane obejmowały okres 49 lat (łącznie 17 898 dobowych przepływów) od 1.11.1955 r. do 31.10.2004 r. zarejestrowanych przez IMGW w czterech przekrojach w zlewni Małej Wisły: Wisła, Ustroń i Skoczów na Wiśle oraz Górki Wielkie na Brennicy, prawym dopływie Wisły. Szczegółowe charakterystyki zlewni i przepływów są zamieszczone w pracy Węglarczyka (2014).

Dla każdej z 12 definicji niżówki określony został ciąg niżówek i dla każdej z nich obliczono czas trwania  $T$  oraz deficyt  $V$ . Liczebności tak określonych prób losowych przedstawia tabela 1.

**Tabela 1.** Liczebności serii niżówek dla 12 definicji niżówki i czterech wodowskazów  
**Table 1.** Number of droughts for 12 drought definitions at 4 investigated cross-sections

Minim. czas trwania niżówki i minim. czas pomiędzy niżówkami $(T_{min}, \tau_{min})$ , doby	Rzeka/wodowskaz															
	Wisła/Wisła				Wisła/Ustroń				Brennica/Górki Wielkie				Wisła/Skoczów			
	$p$				$p$				$p$				$p$			
	60%	70%	80%	90%	60%	70%	80%	90%	60%	70%	80%	90%	60%	70%	80%	90%
7-7	207	174	128	69	217	166	120	74	179	148	99	54	205	168	131	72
14-7	154	127	91	51	157	117	85	43	141	103	69	38	158	127	95	49
14-14	126	110	96	57	133	111	83	48	123	105	63	34	135	112	87	50

Przyjęto, że rozkład prawdopodobieństwa zarówno czasu trwania  $T$  niżówki jak i jej deficytu  $V$  może zostać opisany dwuparametrowym rozkładem lognormalnym o funkcji gęstości w następującej postaci

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

gdzie  $x$  oznacza albo czas  $t - T_{\min} + 1$ , tj. czas trwania niżówki pomniejszony o przyjętą wartość minimalną, albo deficyt  $v$  niżówki.

Parametry  $\mu$  i  $\sigma$  estymowano metodą największej wiarygodności, co w tym przypadku daje proste równania na estymatory:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\mu})^2 \quad (2)$$

Jakość dopasowania rozkładu lognormalnego do danych testowana była za pomocą dwu testów zgodności: testu Andersona-Darlinga i testu Craméra-von Misesa. Dla próby losowej uporządkowanej rosnąco:  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , statystyki testowe tych testów wyrażają się następującymi wzorami:

- statystyka  $CvM$  testu Craméra-von Misesa (Zieliński R., Zieliński W., 1990),

$$CvM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i-1}{2n} - F(x_i) \right)^2 \quad (3)$$

- statystyka  $AD$  testu Andersona-Darlinga (NIST, 2014)

$$AD = -n - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} \left[ \ln(1 - F(x_{n-i+1})) + \ln(1 - F(x_i)) \right] \quad (4)$$

Wartości  $p$  ( $p_v$ ) statystyk testowych obu testów liczone były za pomocą pakietu *Mathematica 9* firmy Wolfram Research.

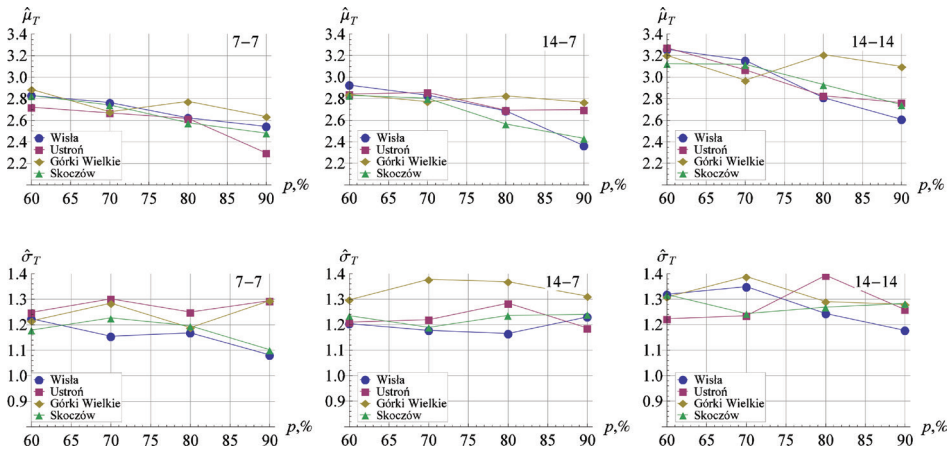
## CZAS TRWANIA NIŻÓWKI

Na rys. 1 zilustrowano graficznie wyniki estymacji parametrów  $(\mu_T, \sigma_T)$  lognormalnego rozkładu prawdopodobieństwa czasu trwania niżówki  $T - T_{\min} + 1$  dla wszystkich definicji niżówki oraz badanych wodowskazów. Przebiegi  $\hat{\mu}_T(p)$  wykazują spodziewaną własność: spadek z  $p$ . Zmiana  $(T_{\min}, \tau_{\min})$  z (7;7) na (14;7) i potem na (14;14) dni powoduje zwiększenie czasu trwania niżówki, a więc i zwiększenie  $\hat{\mu}_T(p)$ . Wartości odpowiadających sobie  $\hat{\mu}_T(p)$  dla badanych wodowskazów są na ogół zbliżone, jednak ich rozrzut zwiększa się z  $p$ .

Analogiczne wykresy  $\hat{\sigma}_T(p)$  przedstawione na rys. 1 dla estymatora drugiego parametru rozkładu lognormalnego,  $\sigma_T$ , nie wykazują tak wyraźnej monotoniczności; globalny ogląd tych wykresów sugeruje prawie niezmiennosc z  $p$  i niewielki wzrost ze zmianą pary  $(T_{\min}, \tau_{\min})$ .

Rys. 2 ilustruje przykładowo, dla stacji wodowskazowej Skoczów, a rys. 3 zbiorczo – dla wszystkich definicji niżówki i wszystkich wodowskazów – jakość dopasowania znalezione go rozkładu lognormalnego czasu trwania niżówki.

Zilustrowaną na rys. 2 zgodność histogramów czasu trwania z funkcją gęstości rozkładu można ocenić jako bardzo dobrą w każdym z 12 przypadków.



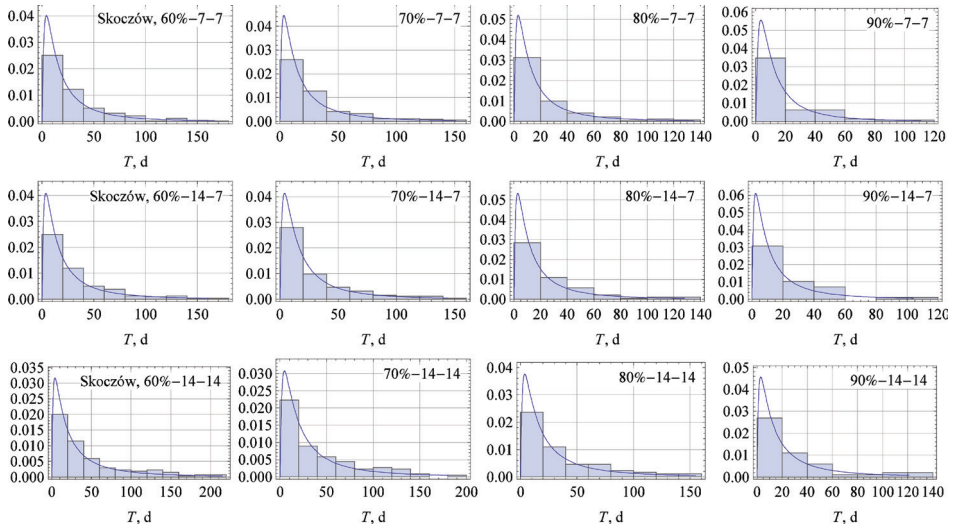
**Rysunek 1.** Estymowane metodą największej wiarygodności wartości parametrów  $(\mu_T, \sigma_T)$  lognormalnego rozkładu prawdopodobieństwa czasu trwania niżówki  $T - T_{min} + 1$  w badanych wodowskazach w zależności od względnego średniego czasu  $p$  przekroczenia w roku (gwarancji) przepływu progowego  $Q_p$  dla przyjętych trzech par wartości  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

**Figure 1.** The maximum likelihood parameters  $(\mu_T, \sigma_T)$  of lognormal probability distribution of drought duration  $T - T_{min} + 1$  at the studied cross-sections versus mean time  $p$  of exceedance of the threshold flow  $Q_p$  for the three adopted pairs of values of  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

Liczbowo fakt ten potwierdza dla wszystkich stacji rys. 3. Wszystkie wartości  $p_v$  są wyższe od najczęściej przyjmowanego w testowaniu hipotez statystycznych 5% poziomu istotności. Dla testu Andersona-Darlinga wartości te przekraczają we wszystkich przypadkach 15%, a dla testu Craméra-von Misesa wartość 20%.

## DEFICYT NIŻÓWKI

Rys. 4 – analogicznie do rys.1 – ilustruje wyniki estymacji parametrów  $(\mu_V, \sigma_V)$  lognormalnego rozkładu prawdopodobieństwa deficytu  $V$  niżówki dla wszystkich definicji niżówki oraz badanych wodowskazów. Przebiegi  $\hat{\mu}_V(p)$  niezwykle regularnie maleją z  $p$ . Linie tego parametru układają się w porządku wielkości zlewni: najwyższe wartości mają  $\hat{\mu}_V(p)$  dla Skoczowa, najmniejsze – dla Wisły. Zmiana  $(T_{min}, \tau_{min})$  z (7;7) na (14;7) i potem na (14;14) dni powoduje zwiększenie deficytu niżówki, a więc i zwiększenie  $\hat{\mu}_V(p)$ .



**Rysunek 2.** Ilustracja jakości dopasowania znalezionej lognormalnej rozkładu prawdopodobieństwa  $LN(\mu_T, \sigma_T)$  czasu trwania niżówki  $T-T_{min}$  w wodowskazie Skoczów w zależności od względnego średniego czasu  $p$  przekroczenia w roku (gwarancji) przepływu progowego  $Q_p$  dla przyjętych trzech par wartości  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

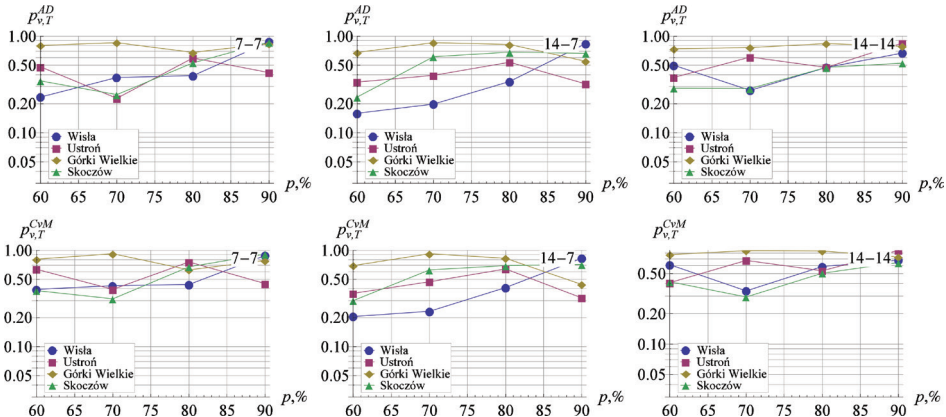
**Figure 2.** Illustration of the goodness-of-fit quality of the lognormal probability distribution  $LN(\mu_T, \sigma_T)$  of drought duration  $T-T_{min}$  at the Skoczów cross-section versus mean time  $p$  of exceedance of the threshold flow  $Q_p$  for the three adopted pairs of values  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

Przebiegi  $\hat{\sigma}_V(p)$  wydają się lekko maleć z  $p$ ; a więc inaczej niż to miało miejsce dla  $\hat{\sigma}_T(p)$ . Natomiast zmiana  $(T_{min}, \tau_{min})$  z (7;7) na (14;7) – czyli podwyższenie minimalnego czasu trwania do 14 dni – spowodowało wyraźną redukcję zmienności deficytu niżówek, co widać na rys. 4 jako zmniejszenie wartości  $\hat{\sigma}_V(p)$ . Podwyższenie minimalnego czasu pomiędzy kolejnymi niżówkami do 14 dni przyniosło zwiększenie zmienności deficytu niżówek nieco ponad poziom (7-7).

Jakość dopasowania rozkładu lognormalnego do danych deficytów niżówki została przedstawiona na rysunkach 5 i 6 analogicznie, jak dla czasu trwania niżówki. Pokazane na rys. 5 histogramy deficytów i opisujące je funkcje gęstości wydają się być w bardzo dobrej zgodności we wszystkich przypadkach.

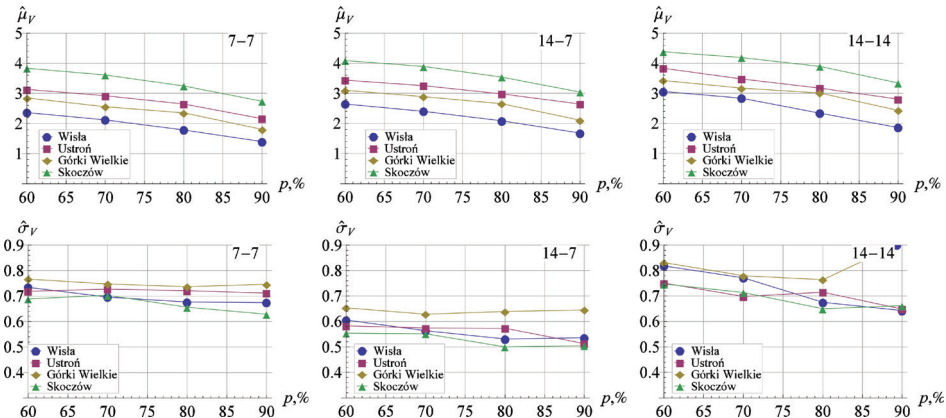
Liczbowo jakość zgodności jest pokazana dla wszystkich definicji niżówki i wszystkich wodowskazów na rys. 6 w postaci funkcji  $p_{v,V}^{CvM}(p)$  lub  $p_{v,V}^{AD}(p)$  przedstawiających zależność wartości  $p$  zastosowanych testów od gwarancji  $p$  przepływu progowego  $Q_p$ . Podobnie jak dla czasu trwania niżówki, wszystkie wartości  $p_v$  są wyższe od zwyczajowego 5% poziomu istotności. Dla obu testów: zarówno testu Andersona-Darlinga jak i dla testu Craméra-von Misesa wartości te przekraczają we wszystkich przypadkach 15%.





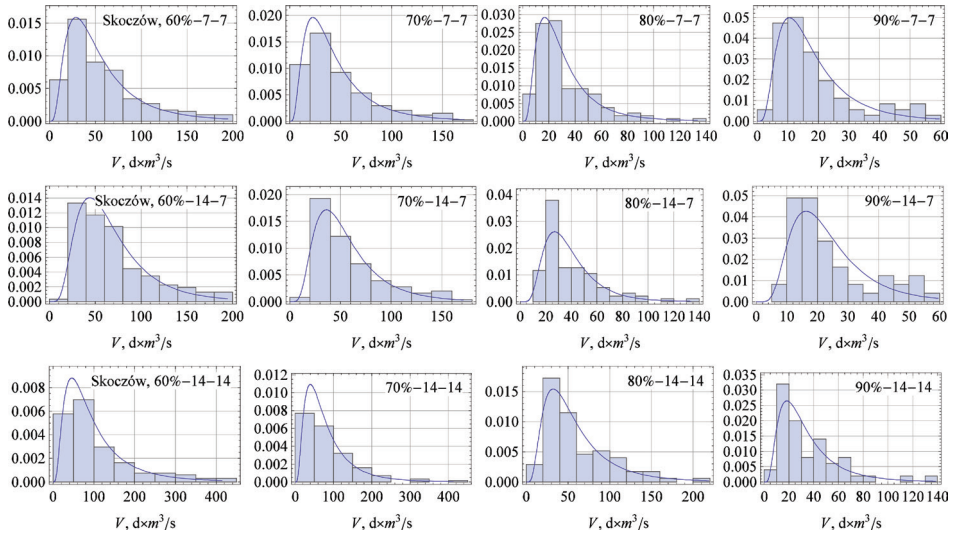
**Rysunek 3.** Wartości  $p$  testu Andersona-Darlinga ( $AD$ ) i Craméra-von Misesa ( $CvM$ ) hipotezy  $H_0(F_T(x)=LN(x,\mu_T, \sigma_T))$ , że czas trwania niżówki  $T-T_{min}$  podlega lognormalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa  $LN(x,\mu_T, \sigma_T)$  z estymowanymi parametrami  $(\mu_T, \sigma_T)$  w funkcji względnego średniego czasu  $p$  przekroczenia w roku przepływu progowego  $Q_p$  dla 3 przyjętych par wartości  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

**Figure 3.**  $p$ -values of the Anderson-Darling ( $AD$ ) and Cramér-von Mises ( $CvM$ ) test of null hypothesis  $H_0(F_T(x)=LN(x,\mu_T, \sigma_T))$  that the drought duration  $T-T_{min}$  has lognormal probability distribution  $LN(x,\mu_T, \sigma_T)$  with estimated parameters  $(\mu_T, \sigma_T)$  versus mean time  $p$  of exceedance per year of the threshold flow  $Q_p$  for three adopted pairs of values of  $(T_{min}, \tau_{min})$ .



**Rysunek 4.** Estymowane metodą największej wiarygodności wartości  $(\hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V)$  parametrów lognormalnego rozkładowi prawdopodobieństwa deficytu  $V$  niżówki w badanych wodowskazach w zależności od względnego średniego czasu  $p$  przekroczenia w roku (gwarancji) przepływu progowego  $Q_p$  dla przyjętych trzech par wartości  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

**Figure 4.** The maximum likelihood parameters  $(\hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V)$  of lognormal probability distribution of drought deficit  $V$  at the studied cross-sections versus mean time  $p$  of exceedance of the threshold flow  $Q_p$  for the three adopted pairs of values  $(T_{min}, \tau_{min})$ .



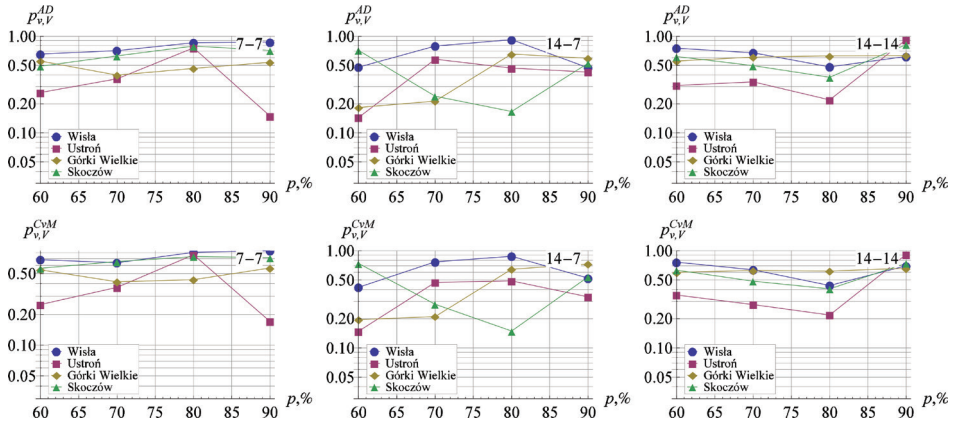
**Rysunek 5.** Ilustracja jakości dopasowania znalezionej lognormalnej rozkładu prawdopodobieństwa deficytu  $V$  niżówki w wodowskazie Skoczów w zależności od względnego średniego czasu  $p$  przekroczenia w roku (gwarancji) przepływu progowego  $Q_p$  dla przyjętych trzech par wartości  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

**Figure 5.** Illustration of the goodness-of-fit quality of the lognormal probability distribution of drought deficit  $V$  at the Skoczów cross-section versus mean time  $p$  of exceedance of the threshold flow  $Q_p$  for the three adopted pairs of values  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

## PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Dla przyjętych 12 definicji niżówki znaleziono na podstawie 49-letnich szeregów czasowych dobowych przepływów w czterech wodowskazach w zlewni Małej Wisły, że rozkłady prawdopodobieństwa czasu  $T$  trwania niżówki oraz deficytu  $V$  niżówki mogą być opisane rozkładem logarytmiczno-normalnym z parametrami estymowanymi metodą największej wiarygodności. Jakość dopasowania badana była dwoma testami zgodności: testem Andersona-Darlinga i testem Craméra-von Misesa. Oba testy pozwalały na przyjęcie badanego rozkładu dla  $T$  i dla  $V$  niezależnie od przyjętej definicji i wodowskazu, gdyż dla zmiennej  $T$  wartości  $p$  ( $p$ -values) pierwszego testu były wyższe od 15%, drugiego – większe od 20%, a dla zmiennej losowej  $V$  wartości  $p$  były dla obu testów nie mniejsze od 15%.





**Rysunek 6.** Wartości p testu Andersona-Darlinga ( $AD$ ) i Craméra-von Misesa ( $CvM$ ) hipotezy  $H_0$ , że deficyt niżówki  $V$  podlega lognormalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa z parametrami  $(\hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V)$  w funkcji względnego średniego czasu  $p$  przekroczenia w roku przepływu progowego  $Q_p$  dla 3 przyjętych par wartości  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

**Figure 6.** p-values of the Anderson-Darling ( $AD$ ) and Cramér-von Mises ( $CvM$ ) test hypothesis  $H_0$  that the drought deficit  $V$  has lognormal probability distribution with estimated parameters  $(\hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V)$  versus mean time  $p$  of exceedance per year of the threshold flow  $Q_p$  for three adopted pairs values of  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

Praca została wykonana w ramach tematu  $\acute{S}$ -1/378/2013/DS *Wpływ czynników antropogennych na ilościowe i jakościowe właściwości procesów hydrologicznych w zlewni, zadanie 3: Analiza własności niżówek w obszarze karpackim zlewni Górnej Wisły.*

## LITERATURA

- Cancelliere A., Bonaccorso B., Rossi G. (2003). *On the probabilistic characterization of drought events*, Hydrology Days, vol. 2003, s.33-44
- Fleig A. (2004). *Hydrological Drought – a comparative study using daily discharge series from around the world*, der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br., Diplomarbeit, Freiburg, 2004
- Jakubowski W. (2011). *Rozkłady prawdopodobieństwa w ocenie suszy hydrologicznej*, Wrocław: Uniwersytet Przyrodniczy, 177 s.
- Kaznowska E., Banasik K. (2011). *Streamflow droughts and probability of their occurrence in a small agricultural catchment*, Ann. Warsaw Univ. of Life Sci. – SGGW, Land Reclam. 43 (1), 57-69

- NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods* (online), <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/> (dostęp: 16.12.2013 r.)
- Stahl K. (2001). Hydrological Drought – a Study across Europe, Institut für Hydrologie der Universität Freiburg i. Br., Freiburg, 129 s.
- Tallaksen L. M., Hisdal H. (1997). *Regional analysis of extreme streamflow drought duration and deficit volume*, FRIEND '91 — Regional Hydrology: Concepts and Models for Sustainable Water Resource Management IAI, (Proceedings of the Postojna, Slovenia, Conference, September-October 1997). IAHS Publ. no. 246
- Tallaksen, L. M., Stahl, K., Wong, G. (2011). Space-time characteristics of large-scale droughts in Europe derived from streamflow observations and WATCH multi-model simulations, WATCH Technical Report Number 48, 20 s.
- Tokarczyk T. (2013). Classification of low flow and hydrological drought for a river basin, *Acta Geophysica* 61(2), 404-421
- Tomaszewski E. (2011). Defining the threshold level of hydrological drought in lake catchments, *Limnological Review* 11(2), 81-88
- Zelenhasić E. Salvai A. (1987). A Method of Streamflow Drought Analysis, *Water Resour. Res.*, 23(1), 156–168
- Węglarczyk, S. (2014). Kryteria definicyjne niżówki i ich wpływ na własności charakterystyk niżówki. 1. Stacjonarność niżówek. *Infrastruktura i ekologia terenów wiejskich*, Nr II/1, s. 251-263
- Zieliński R., Zieliński W. (1990). *Tablice statystyczne*, PWN, Warszawa 1990

Prof. dr hab. Stanisław Węglarczyk  
Politechnika Krakowska  
Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków  
e-mail: sweglarc@iigw.pl

Mgr inż. Katarzyna Baran-Gurgul  
Politechnika Krakowska  
Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków  
e-mail: kbg@iigw.pl