

*Elżbieta Jasińska, Edward Preweda*

## **APROKSYMACJA POWIERZCHNI STOPNIA DRUGIEGO**

---

### ***APPROXIMATION OF THE QUADRATIC SURFACE PARAMETERS***

#### **Streszczenie**

Na podstawie geodezyjnych, fotogrametrycznych czy radiowych obserwacji obiektów powłokowych określa się ich położenie, wymiary i kształt. Podstawą aproksymacji matematycznego modelu powierzchni, względem którego ocenia się stan geometryczny obiektu, są współrzędne przestrzenne punktów reprezentujących powłokę obiektu. W praktyce, wartości parametrów modelowych wyznacza się bez uwzględnienia dokładności tych współrzędnych. Macierz kowariancji dla współrzędnych punktów obserwowanych jest podstawą dla dokonania oceny dokładności wyznaczanych parametrów powierzchni i ich funkcji. W pracy przedstawiono algorytm umożliwiający ocenę dokładności estymowanych parametrów powierzchni. Określono miarę dopasowania modelu matematycznego do zaobserwowanego stanu geometrycznego powłoki, na podstawie którego można wnioskować o adekwatności modelu. Podano również metodę oszacowania estymatora wariancji jednostkowej odzwierciedlającego wpływ błędów tylko z tytułu pomiarów.

**Słowa kluczowe:** chłodnie kominowe, powierzchnie drugiego stopnia, modele statystyczne

#### ***Summary***

*On the base of geodetic, photogrammetric or radio observations of the sheet objects its position, dimensions and shape are determined. Approximation of mathematical model for the surface, used as a reference for estimation of geometric state of the object is based on the space co-ordinates of points representing the sheet of the object. In practice, the model parameter values are determined with-*

out consideration of accuracy of these co-ordinates. However, the covariance matrix for co-ordinates of observed points constitutes a base to estimate accuracy of determined parameters and its functions. In this paper an algorithm enabling estimation of accuracy for the estimated parameters of the surface is presented. In addition, a measure of fitting of mathematical model to the observed geometric state of the sheet is determined. This parameter can be used to decide on adequacy of a model. A method of estimation of the unit variance estimator reflecting effect of measurement errors only is also described.

**Key words:** cooling towers, quadratic surface, statistical models

## WSTĘP

Położenie, wymiary i kształt obiektów powłokowych określa się w oparciu o wyniki pomiarów geodezyjnych lub fotogrametrycznych. Obiekty te reprezentowane są przez zbiory punktów rozmieszczonych na ich zewnętrznej lub wewnętrznej powierzchni, obserwowanych z punktów odniesienia. Liczba i sposób rozmieszczenia punktów osnowy zależy od stosowanej techniki obserwacji powłoki, wymogów dokładnościowych i warunków terenowych.

Na podstawie współrzędnych przestrzennych punktów reprezentujących powłokę obiektu aproksymuje się powierzchnię stopnia drugiego.

Równanie ogólne tej powierzchni ma postać:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

W praktyce, wartości parametrów  $a_{ij}$  szacuje się bez uwzględnienia dokładności współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Tymczasem, macierz kowariancji  $\mathbf{Cov}(x, y, z)$  dla współrzędnych punktów obserwowanych stanowi podstawę dla dokonania oceny dokładności wyznaczanych parametrów powierzchni i ich funkcji [Preweda 1995].

Równanie (1) można zapisać w postaci

$$G(x, y, z) = x^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{14}x + b_{22}y^2 + 2b_{23}yz + 2b_{24}y + b_{33}z^2 + 2b_{34}z + b_{44} = 0 \quad (2)$$

Gdzie:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}; (b_{11} = 1);$$

W praktyce liczba punktów obserwowanych jest zawsze znacznie większa od liczby niewiadomych parametrów  $b_{11}$ , wobec czego zamiast układu równań typu (2) zestawia się odpowiednie równania aproksymacyjne:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = & x_i^2 + 2b_{12}x_iy_i + 2b_{13}x_iz_i + 2b_{14}x_i + b_{22}y_i^2 + \\ & 2b_{23}y_iz_i + 2b_{24}y_i + b_{33}z_i^2 + 2b_{34}z_i + b_{44} \end{aligned} \quad (3)$$

Dla zwiększenia dokładności obliczeń liniową względem niewiadomych funkcję (3) można rozwinąć w szereg [Głoub, Reinsch 1970].

Układ równań zapisany w notacji macierzowej przyjmuje wówczas postać:

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

przy czym:

$$\mathbf{B}_{(n,u)} = \begin{bmatrix} 2x_1y_1 & 2x_1z_1 & \dots & \dots & 1 \\ 2x_2y_1 & 2x_2z_2 & \dots & \dots & 1 \\ 2x_3y_3 & 2x_3z_3 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2x_ny_n & 2x_nz_n & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(u,1)} = \begin{bmatrix} db_{12} \\ db_{13} \\ db_{14} \\ \dots \\ \dots \\ db_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \dots \\ \dots \\ g_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(n,1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \dots \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

(n - liczba obserwowanych punktów, u - liczba niewiadomych).

$\boldsymbol{\varepsilon}$  jest wektorem losowym o macierzy kowariancji  $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$ , którą wyznaczymy z zależności

$$\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{N}^T \mathbf{Cov}(x,y,z) \mathbf{N} \quad (5)$$

Gdzie:

$\mathbf{N}$  - jest macierzą utworzoną z pochodnych cząstkowych funkcji typu (2) względem współrzędnych x,y,z punktów obserwowanych (macierzą składowych wektorów normalnych do powierzchni),

$\mathbf{Cov}(x,y,z)$  - macierz kowariancji dla współrzędnych punktów reprezentujących powłokę.

Macierz  $\mathbf{N}$  określają zależności:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{N}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_{x_i} = 2(x_i + y_i\tilde{b}_{12} + z_i\tilde{b}_{13} + \tilde{b}_{14}) \\ N_{y_i} = 2(x_i\tilde{b}_{12} + y_i\tilde{b}_{22} + z_i\tilde{b}_{23} + \tilde{b}_{24}) \\ N_{z_i} = 2(x_i\tilde{b}_{13} + y_i\tilde{b}_{23} + z_i\tilde{b}_{33} + \tilde{b}_{34}) \end{bmatrix}$$

## ESTYMACJA PUNKTOWA WEKTORA NIEWIADOMYCH

Nieobciążony estymator  $\hat{\mathbf{x}}$  wektora niewiadomych oszacujemy rozwiązując uogólnione liniowe zadanie najmniejszych kwadratów:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{g} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \text{minimum} \quad (6)$$

Jeżeli współrzędne punktów odniesienia przyjmiemy za nieskorelowane, wówczas kowariancje dla wektora  $\boldsymbol{\varepsilon}$  będą zerowe (nie uwzględniamy korelacji fizycznych), a macierz  $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$  - macierzą diagonalną (Lawson, Hanson 1965). Wobec tego, równanie (6) możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T [\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})]^{-1} \mathbf{v} = \left\| [\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})]^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{g} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}) \right\|^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (7)$$

Jeżeli uwzględnimy korelacje pomiędzy współrzędnymi punktów odniesienia to macierz  $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$  będzie macierzą niediagonalną. Względy numeryczne przemawiają za tym, aby i w takim przypadku sprowadzić zadanie (6) do postaci typu (7). Można tego dokonać przez sprowadzenie macierzy  $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$  do postaci diagonalnej przy pomocy przekształceń ortogonalnych lub przez wcześniejsze sprowadzenie do postaci diagonalnej macierzy kowariancji  $\mathbf{Cov}(X, Y, Z)$  punktów odniesienia.

## PRZEKSZTAŁCENIA ORTOGONALNE MACIERZY

Dokonując rozkładu macierzy  $\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$  względem wartości własnych uzyskamy

$$\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \quad (8)$$

Gdzie:

$\mathbf{U}$  - macierz ortogonalna,

$\mathbf{S} = \text{diag}(\lambda_i)$ .

Możemy zatem zapisać:

$$[\mathbf{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})]^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{U} \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \quad (9)$$

przy czym zachodzą związki

$$\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} = \text{diag}\left(\lambda_i^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (10)$$

$$\mathbf{Cov}(\varepsilon) = [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{\frac{1}{2}}$$

Po przekształceniach

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{U}^T \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{U}^T \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{U}^T \mathbf{v} \quad (11)$$

otrzymujemy

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-1} \mathbf{v} = \left\| \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} (\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{x}}) \right\|^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (12)$$

Uwzględniając warunek  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$  oraz przyjmując oznaczenia:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-1} \frac{1}{tr\{[\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-1}\}} \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B} \\ \mathbf{w} &= [\mathbf{Cov}(\varepsilon)]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{g} \end{aligned} \right\} \text{ - jeżeli } \mathbf{Cov}(\varepsilon) \text{ jest macierzą diagonalną,}$$

natomiast

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{S}^{-1} \frac{1}{tr\{\mathbf{S}^{-1}\}} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{g}} \end{aligned} \right\} \text{ - jeżeli } \mathbf{Cov}(\varepsilon) \text{ nie jest macierzą diagonalną,}$$

otrzymujemy jednolitą postać zrównoważonego układu równań aproksymacyjnych:

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w} \quad (13)$$

rozwiązywanego przy warunku

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \left\| \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}) \right\|^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (14)$$

## SPROWADZENIE MACIERZY KOWARIANCJI DO POSTACI DIAGONALNEJ

Analizując przedstawiony algorytm może wydawać się, że jego praktyczne zastosowanie będzie kosztowne w przypadku dużej liczby punktów reprezentujących powłokę. Problem obliczeń numerycznych można uprościć przekształcając macierz kowariancji  $\mathbf{Cov}(X, Y, Z)$  dla współrzędnych punktów osnowy w macierz kowariancji minimalnych  $\mathbf{Cov}_{min}(X, Y, Z)$ . Sposób postępowania może być tu analogiczny do przedstawionego powyżej. Wyznaczając wartości własne macierzy  $\mathbf{Cov}(X, Y, Z)$ , otrzymamy

$$\mathbf{Cov}_{min}(X, Y, Z) = \text{diag}(\lambda_i), i = 1 \dots 3 \times n \quad (15)$$

gdzie  $n$  - liczba punktów osnowy odniesienia.

Dzięki takiemu przekształceniu macierz  $\mathbf{Cov}(\varepsilon)$  będzie zawsze macierzą diagonalną.

Wybór drogi prowadzącej do uzyskania diagonalnej macierzy  $\mathbf{Cov}(\varepsilon)$  uzależnić należy od konkretnego zadania mając to na uwadze, że w drugim przypadku opieramy się na ekstremalnych wariancjach a zatem uniezależniamy się od przyjętej orientacji osnowy odniesienia.

## ESTYMACJA PRZEDZIAŁOWA

Wektor estymowanych parametrów powierzchni oszacujemy za pomocą pseudoodwrotności macierzy.

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{w} \quad (16)$$

Rozwiązanie to spełnia warunek (14) metody najmniejszych kwadratów. Zastosowanie do rozwiązania układu równań pseudoodwrotności Moore'a-Penrose'a jest uzasadnione możliwością wystąpienia defektu macierzy współczynników przy niekorzystnym rozmieszczeniu punktów na obserwowanej powłoce [Preweda 1995].

Empiryczną wartość estymatora wariancji  $\hat{\sigma}_o^2$ , stanowiącą punktową ocenę wartości rozwiązania (14), określa się według wzoru

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\left\| \mathbf{P}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{w} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \right\|^2}{n - u} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u} \quad (17)$$

Przedział ufności dla wariancji opiera się na statystyce chi-kwadrat [Papoulis 1970]. Korzystając z estymatora wariancji, dla  $(n-u)$  stopni swobody i ustalonego poziomu ufności  $(1-\alpha)$  zachodzi związek

$$P\left\{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-u\right) < \frac{(n-u)\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} < \chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-u\right)\right\} = 1-\alpha$$

Rozwiązując powyższą nierówność względem  $\sigma_o^2$  otrzymuje się

$$\frac{(n-u)\hat{\sigma}_o^2}{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-u\right)} < \sigma_o^2 < \frac{(n-u)\hat{\sigma}_o^2}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-u\right)} \quad (18)$$

przy czym  $\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-u\right)$  i  $\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-u\right)$  oznaczają kwantyle rzędu od-

powiednio  $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$  i  $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  rozkładu  $\chi^2$  o  $(n-u)$  stopniach swobody [Korn

G.A, Korn T.M, 1983].

Granice przedziału ufności dla odchylenia standardowego  $\sigma_o$  są pierwiastkami kwadratowymi lewej i prawej strony nierówności (18).

## WNIOSKI

Należy zauważyć, że estymator odchylenia standardowego  $\hat{\sigma}_o$  wyznaczony zależnością (17) jest jedynie miarą dopasowania modelu matematycznego do zaobserwowanego stanu geometrycznego powłoki i na jego podstawie możemy wnioskować tylko o adekwatności modelu. Parametr ten nie może wchodzić do oceny dokładności oszacowanych parametrów i ich funkcji, gdyż oprócz błędów pomiarowych uwzględnia też błędy montażu powłoki oraz jej deformacje. Ścisłe rozdzielanie tych błędów nie jest naturalnie możliwe. Dla dokonania oceny dokładności należy oszacować a priori wpływ błędów z tytułu pomiarów  $\hat{\sigma}_{pom}^2$ , i taką miarę przyjmując za estymator wariancji jednostkowej.

Wartość parametru  $\hat{\sigma}_{pom}^2$  można oszacować na różne sposoby. Na przykład, można założyć, że odchyłka  $v_i$  z tytułu błędów pomiarowych jest równa błędowi określenia i-tego równania aproksymacyjnego.

Zgodnie z tym zapiszmy

$$|v_i^{apr}| = \mathbf{Cov}(\varepsilon_i)^{\frac{1}{2}} - \text{dla diagonalnej macierzy kowariancji } \mathbf{Cov}(\varepsilon)$$

oraz

$$|v_i^{apr}| = (\lambda_i)^{\frac{1}{2}} - \text{dla niediagonalnej macierzy kowariancji } \mathbf{Cov}(\varepsilon)$$

Stąd

$$(v^T P v)^{apr} = \text{tr} \left\{ \frac{1}{\text{tr}\{\mathbf{Cov}(\varepsilon)^{-1}\}} \mathbf{E} \right\} = \frac{n}{\text{tr}\{\mathbf{Cov}(\varepsilon)^{-1}\}}$$

Dla diagonalnej macierzy  $\mathbf{Cov}(\varepsilon)$  otrzymujemy

$$\hat{\sigma}_{pom}^2 = \frac{n}{n-u} \times \frac{1}{\text{tr}\{\mathbf{Cov}(\varepsilon)^{-1}\}} \quad (19)$$

i analogicznie w przypadku niediagonalnej macierzy  $\mathbf{Cov}(\varepsilon)$

$$\hat{\sigma}_{pom}^2 = \frac{n}{n-u} \times \frac{1}{\text{tr}\{\mathbf{S}^{-1}\}} \quad (20)$$

Tak wyznaczony parametr  $\hat{\sigma}_{pom}^2$  może służyć nie tylko do oszacowania dokładności estymowanych parametrów i ich funkcji, ale również do sprawdzenia istotności parametru  $\hat{\sigma}^2$ .

Macierz kowariancji dla wektora niewiadomych  $\bar{\mathbf{X}}$  wyraża się wzorem

$$\mathbf{Cov}(\hat{x}) = \hat{\sigma}_{pom}^2 \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^+)^T \quad (21)$$

Przedział ufności dla niewiadomych parametrów powierzchni wynika ze statystyki t-studenta. Korzystając z symetrycznych przedziałów dwustronnych można zapisać

$$\hat{x} = \pm t \left( 1 - \frac{\alpha}{2}, n-u \right) \hat{\sigma}_x \quad (22)$$

$t \left( 1 - \frac{\alpha}{2}, n-u \right)$  oznacza kwantyl rzędu  $\left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$  rozkładu Studenta o  $(n-u)$  stopniach swobody, zaś  $\hat{\sigma}_x$  jest estymatorem odchylenia standardowego poszczegól-



gólnych niewiadomych. Elementy tego wektora obliczymy korzystając z macierzy (21)

$$\hat{\sigma}_{x_i} = \sqrt{[\text{Cov}(\hat{x})]_{i,i}} \quad (23)$$

## BIBLIOGRAFIA

- Gloub G.H., Reinsch C. : *Singular Value Decomposition and Least Squares Solution*. Num. Math. 14 (403-420). 1970.
- Korn G.A., Korn T.M. : *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*. PWN, Warszawa 1983.
- Lawson Ch. L. , Hanson R.J. : *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, Englewood, New Jersey 1965.
- Papoulis A. : *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*. WNT. Warszawa, 1970
- Preweda E. : *System pomiaru, obliczeń i wizualizacji zmian geometrycznych obiektów powłokowych o powierzchni stopnia drugiego*. Rozprawa doktorska, AGH Kraków 1995.
- Jasińska E., Łacina W., Preweda E., Żygielo P. : *A modified algorithm of determining the shape of shell objects using the method of conical intersection*. Electronic Journal of Polish Agricultural Universities. Series: Geodesy and Cartography ; ISSN 1505-0297. 2003 vol. 6 iss. 2 s. [1–13].
- Jasińska E., Preweda E. : *A few commentson determining the shapes of hyperboloid cooling towers by the means of ambient tangents method* . Pórocznik Geodezja, AGH, ISSN 1234-6608. 2004 t. 10 z. 1 s. 19–29.
- Kawka T. : *System transmisji radiowej w monitoringu pracy chłodni kominowej*. Magazyn „Pod kontrolą” 1/2012, [www.podkontrola.pl/biezacy/dobra\\_praktyka\\_s1.html](http://www.podkontrola.pl/biezacy/dobra_praktyka_s1.html)

Dr inż. Elżbieta Jasińska  
 Dr hab. inż. Edward Preweda, prof. AGH  
 Katedra Geomatyki  
 Akademia Górniczo – Hutnicza im. St. Staszica  
 al. A. Mickiewicza 30  
 30-059 Kraków  
 e-mail: [jasinska@agh.edu.pl](mailto:jasinska@agh.edu.pl)  
[preweda@agh.edu.pl](mailto:preweda@agh.edu.pl)

*Artykuł powstał w ramach badań statutowych Katedry Geomatyki w roku 2012*