INFRASTRUKTURA I EKOLOGIA TERENÓW WIEJSKICH
INFRASTRUCTURE AND ECOLOGY OF RURAL AREAS

Nr 3/2011, POLSKA AKADEMIA NAUK, Oddział w Krakowie, s. 115–123
Komisja Technicznej Infrastruktury Wsi

Andrzej Borowiecki

OCENA DOKŁADNOŚCI ODTWORZONYCH PARAMETRÓW RÓWNANIA ODCINKA PROSTOLINIOWEGO

ESTIMATION OF ACCURACY OF RECONSTRUCTED PARAMETERS OF STRAIGHT LINE EQUATION

Streszczenie

W pracy przedstawiono analizę porównawczą dokładności wyników obliczenia parametrów odcinka prostoliniowego dwiema ścisłymi metodami – parametryczną i zawarunkowaną z niewiadomymi. Wykazano, że mimo ścisłości obu metod i identyczności wyznaczonych parametrów, ich ocena dokładności jest różna - zależnie od zastosowanej metody.

Summary

The paper presents comparative analysis of accuracy of results of straight line parameters computed accordingly to the method of parameters, and to the method of conditions with unknowns. It is shown that in spite of strictness of both methods and identity of reconstructed parameters, their estimation of accuracy differs – depending on applied method.

WSTĘP

Potrzeba odtwarzania parametrów tras istniejących w terenie została szczegółowo omówiona w pracy habilitacyjnej Waldemara Krupińskiego [2006]. Dotyczy to zarówno tras komunikacyjnych, jak i uregulowanych cieków wodnych. Podano tam szczegółowo sposoby odtwarzania parametrów odcinków prostoliniowych tras, łuków kołowych i krzywych przejściowych.

Rozwiązywanie tego rodzaju zadań metodami iteracyjnymi opisane zostało w pracy Krupiński, Borowiecki [2006] gdzie wykorzystano nakładkę na Excel – Solver.

W niniejszej pracy zostaną omówione zagadnienia związane z odtwarzaniem parametrów odcinka prostoliniowego trasy na podstawie pomiarów terenowych, oraz oceny ich dokładności.

Odtwarzanie parametrów odcinka prostoliniowego wymaga dokonania w terenie pomiarów mających na celu wyznaczenie współrzędnych punktów wyznaczających linię prostą.

W oparciu o te współrzędne $\boldsymbol{x_i}$ i $\boldsymbol{y_i}$ należy znaleźć parametry $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ równania prostej:

$$y_i = a x_i + b \tag{1}$$

Do jednoznacznego wyznaczenia równania prostej wystarczyłoby wyznaczyć współrzędne dwóch punktów na prostej, jednak ze względu na nieuniknione błędy pomiaru oraz błędy identyfikacji w terenie samych punktów, współrzędne $\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}$ wyznacza się dla i > 2. Stąd wynika konieczność przeprowadzenia wyrównania obserwacji nadliczbowych metodą najmniejszych kwadratów. Parametrami do wyznaczenia są $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Metoda najmniejszych kwadratów daje też możliwość oceny dokładności wyznaczonych parametrów.

METODA PARAMETRYCZNA

W celu wyznaczenia parametrów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ równania bardzo często stosowana jest metoda parametryczna, w której układa się następujące równania obserwacyjne:

$$y_i + v_i = a . x_i + b \tag{2}$$

Obliczenia wykonuje się tak ,by spełniony był warunek $\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \min$.

Przybliżone wartości parametrów $\boldsymbol{a_0}$ i $\boldsymbol{b_0}$ oblicza się w oparciu o współrzędne dwóch dowolnie wybranych punktów:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 x_1 + b_0 \\ y_2 &= a_0 x_2 + b_0 \end{aligned} \tag{3}$$

W oparciu o równania (3) oblicza się przybliżone wartości parametrów z następujących wzorów:

$$a_0 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \;;\; b_0 = y_1 - a_0 x_1 \tag{4}$$

Następnie układa się równania błędów:

$$v_i = \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)\Delta a + \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)\Delta b + l_i \tag{5}$$

gdzie: $\left(\frac{\partial}{\partial a}\right) = x_i$; $\left(\frac{\partial}{\partial b}\right) = 1$; $l_i = a_0 x_i + b_0 - y_i$

Macierzowy zapis równań błędów jest następujący:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A.X} - \mathbf{L} \tag{6}$$

co oznacza:

$$\begin{bmatrix} v_{y_1} \\ v_{y_2} \\ \vdots \\ v_{y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -l_1 \\ -l_2 \\ \vdots \\ -l_n \end{bmatrix}$$

Szukane poprawki wyznaczanych parametrów oblicza się z wzoru:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{L}\right) \tag{7}$$

Następnie oblicza się wyrównane wartości parametrów prostej:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a \\ b &= b_0 + \Delta b \end{aligned} \tag{8}$$

Poprawki v_y oblicza się z wzoru (6), po czym w celu przeprowadzenia analizy dokładności należy obliczyć średni błąd spostrzeżeń:

$$m = \sqrt{\frac{\sum v_{y_i}^2}{i-2}} \tag{9}$$

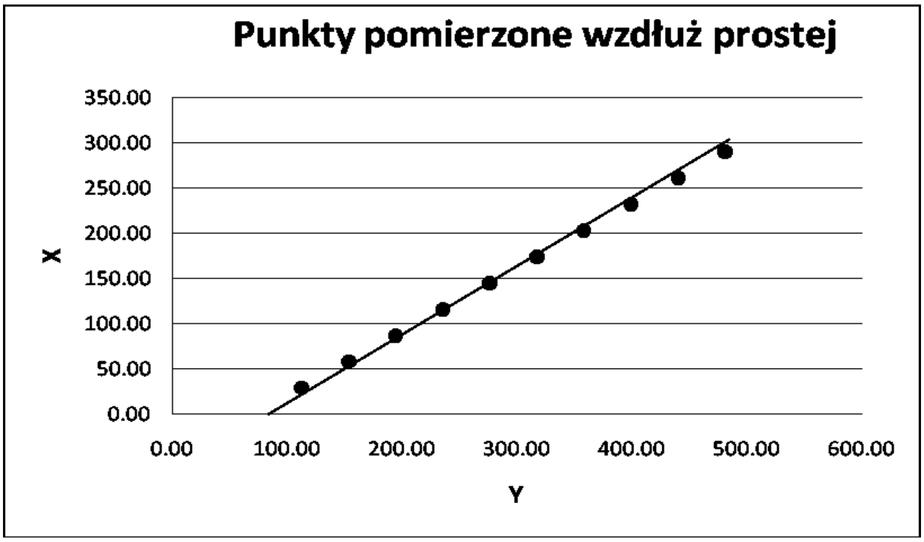
Błędy średnie obliczonych parametrów oblicza się z wzorów:

$$\begin{aligned} m_a &= m\sqrt{f_a^T (A^T A)^{-1} f_a} \qquad gdzie: f_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ m_b &= m\sqrt{f_b^T (A^T A)^{-1} f_b} \qquad gdzie: f_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

Przykład: W terenie pomierzono współrzędne 10 punktów leżących wzdłuż odtwarzanej linii prostej, której parametry chcemy obliczyć.

Nr	X	Y
1	29.24	112.23
2	58.26	153.22
3	87.02	194.07
4	116.19	235.23
5	145.24	276.20
6	174.03	317.12
7	203.14	358.22
8	232.23	399.17
9	261.05	440.16
10	290.08	481.19

Załączony wykres przedstawia pomierzone punkty i przybliżony przebieg prostej.



Przybliżone wartości szukanych parametrów obliczono z wzorów (4):

a_0= **1.413**

b_0= **70.910**

Macierze **A** i **L** dla przykładowych danych:

29.24	1
58.26	1
87.02	1
116.19	1
145.24	1
174.03	1
203.14	1
232.23	1
261.05	1
290.08	1

A

0.000
0.000
0.209
0.146
0.072
0.312
0.287
0.142
0.409
0.425

L

Obliczone poprawki parametrów z wzoru (7):

Δa= 0.0015

Δb= -0.0338

Wyrównane wartości parametrów (8)

a = 1.4144

b = 70.8765

Ocena dokładności:

[vv] = 0.549377

m_0= 0.262

m_a= 0.0010

m_b= 0.1792

Charakterystyczne dla tej metody jest to, że oblicza się poprawki wyłącznie dla współrzędnych y_i , podczas gdy współrzędne x_i pozostają bez zmian, a więc **[vv]=[v_y^2].**

Metoda wyrównania spostrzeżeń zawarunkowanych z niewiadomymi [Łoś 1973]

W celu rozwiązania omawianego zagadnienia można również zastosować wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów spostrzeżeń zawarunkowanym z niewiadomymi. W metodzie tej układa się równania warunkowe, zawierające zarówno wyniki pomiarów jak i niewiadome, w postaci:

$$y_i + v_{y_i} = a \cdot (x_i + v_{x_i}) + b \qquad i \in \{1,2,3,...,n\}$$

lub (11)

$$y_i + v_{y_i} - a \cdot (x_i + v_{x_i}) - b \quad = 0 \qquad i \in \{1,2,3,...,n\}$$

W metodzie tej - jak wskazuje jej nazwa - występują warunki nałożone na wyniki obserwacji, którymi są tutaj współrzędne **x** i **y** punktów trasy. Warunki te zawierają też niewiadome, którymi są: parametry **a** i **b** równania prostej.

W celu otrzymania jednoznacznego, dokładnego rozwiązania omawianego problemu, należy do uprzednio ułożonych równań warunkowych (11) wstawić w miejsce parametrów prostej **a** oraz **b**, wartości $\mathbf{a_0+\Delta a}$ oraz $\mathbf{b_0+\Delta b}$ **.**

$$(a_0 + \Delta a) \cdot (x_i + v_{x_i}) + (b_0 + \Delta b) - y_i - v_{y_i} = 0 \qquad i \in \{1,2,3,...,n\} \tag{12}$$

Równania powyższe po przekształceniu do postaci liniowej w równania odchyłek przyjmują następującą formę:

$$a_0 \cdot v_{x_i} - 1 \cdot v_{y_i} + x_i \cdot \Delta a + 1 \cdot \Delta b + (a_0 \cdot x_i + b_0 - y_i) = 0 \tag{13}$$

Wszystkie równania doprowadzone do postaci liniowej i przekształcone w równania odchyłek tworzą układ równań:

$$\begin{aligned} A_1 v_1 + A_2 v_2 + \cdots A_n v_n + a_1 \Delta a + b_1 \Delta b + \cdots + \omega_1 &= 0 \\ B_1 v_1 + B_2 v_2 + \cdots B_n v_n + a_2 \Delta a + b_2 \Delta b + \cdots + \omega_2 &= 0 \\ R_1 v_1 + R_2 v_2 + \cdots R_n v_n + a_r \Delta a + b_r \Delta b + \cdots + \omega_r &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Wprowadzając zapis macierzowy:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ \cdots \\ \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} \qquad \underline{W} = \begin{bmatrix} -\omega_1 \\ -\omega_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ -\omega_r \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_1 & R_2 & \cdots & R_n \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_r & b_r & \cdots \end{bmatrix}$$

możemy układ równań odchyłek (14) zapisać w postaci:

$$\left[\underline{A} \;\middle|\; \underline{B}\right] \cdot \underline{x} - \underline{W} = \underline{0} \tag{15}$$

Rozwiązanie tego zadania przebiega w dwóch etapach. W pierwszym obliczamy macierz korelat $\underline{\mathbf{k}}$:

$$\underline{k} = \underline{N}^{-1} \cdot \underline{W}' \tag{16}$$

gdzie:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} \underline{A} \cdot \underline{A}^T & \underline{B} \\ \underline{B}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \qquad \underline{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k'} \\ \_\_ \\ \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} \qquad \underline{W'} = \begin{bmatrix} -\omega_1 \\ -\omega_2 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{W} \\ \_\_ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a następnie oblicza się macierz poprawek **V**:

$$\underline{V} = \underline{A}^T \cdot \underline{k'} \tag{17}$$

gdzie:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ \cdots \\ v_{y_2} \end{bmatrix}$$

Przykład (cd):

Współczynniki równań odchyłek (13) oraz macierz normalna *N* (16) dla tych samych danych:

	v_{yi}	v_{xi}	Δa	Δb	l_i
1	1	-1.41	-29.24	-1	0.000
2	1	-1.41	-58.26	-1	0.000
3	1	-1.41	-87.02	-1	0.209
4	1	-1.41	-116.19	-1	0.146
5	1	-1.41	-145.24	-1	0.072
6	1	-1.41	-174.03	-1	0.312
7	1	-1.41	-203.14	-1	0.287
8	1	-1.41	-232.23	-1	0.142
9	1	-1.41	-261.05	-1	0.409
10	1	-1.41	-290.08	-1	0.425

2.9963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-29.24	-1.00
0	2.9963	0	0	0	0	0	0	0	0	-58.26	-1.00
0	0	2.9963	0	0	0	0	0	0	0	-87.02	-1.00
0	0	0	2.9963	0	0	0	0	0	0	-116.19	-1.00
0	0	0	0	2.9963	0	0	0	0	0	-145.24	-1.00
0	0	0	0	0	2.9963	0	0	0	0	-174.03	-1.00
0	0	0	0	0	0	2.9963	0	0	0	-203.14	-1.00
0	0	0	0	0	0	0	2.9963	0	0	-232.23	-1.00
0	0	0	0	0	0	0	0	2.9963	0	-261.05	-1.00
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.9963	-290.08	-1.00
-29.24	-58.25	-87.01	-116.19	-145.24	-174.03	-203.13	-232.22	-261.04	-290.07	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0

Obliczone poprawki parametrów z wzoru (16):

Δa= 0.0015

Δb= -0.0338

Wyrównane wartości parametrów (8)

a = 1.4144

b = 70.8765

Ocena dokładności:

[vv] = 0.0227

m0= 0.0533

ma= 0.0533

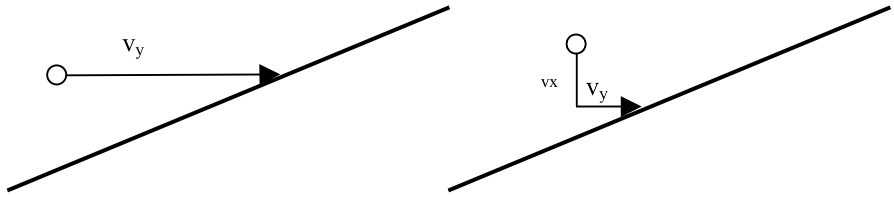
mb= 0.0826

W metodzie spostrzeżeń zawarunkowanych z niewiadomymi oblicza się poprawki zarówno dla współrzędnych x_i jak i dla współrzędnych y_i, a więc **[vv]= [v_x^2] + [v_y^2].**

WNIOSKI

Porównanie wyników obliczeń z obu metod pozwala na stwierdzenie, że wprawdzie wartości obliczanych parametrów ***a*** i ***b*** są identyczne, jednak wielkości sumy kwadratów poprawek i obliczanego na ich podstawie błędu średniego z metody zawarunkowanej z niewiadomymi są mniejsze niż dla metody parametrycznej.

Wynika to z faktu, że w metodzie zawarunkowanej z niewiadomymi oblicza się poprawki zarówno dla współrzędnych x_i , jak i dla współrzędnych y_i - co sprawia, że bezwzględna wielkość przesunięcia punktu tak by znalazł się na prostej jest mniejsza, co obrazuje poniższy szkic.



BIBLIOGRAFIA

Krupiński W. *Metody identyfikacji geometrycznych parametrów tras drogowych i kolejowych w aspekcie ich modernizacji*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, Olsztyn 2006.

Krupiński W., Borowiecki A. *Numeryczne ustalanie parametrów linii prostej i łuku kołowego systemem SOLVER*. ZN AR w Krakowie, nr 431, Geodezja z. 22, s. 11–20. 2006.

Łoś A. *Rachunek wyrównawczy*, Tom I, PWN, Warszawa-Kraków, 1973.

Dr inż. Andrzej Borowiecki
Wyższa Szkoła Inżynieryjno-Ekonomiczna w Rzeszowie
ul. Mirocińska 40
35-232 Rzeszów

Recenzent: *Prof.dr hab. Ryszard Hycner*