



**KRYTERIA DEFINICYJNE NIŻÓWKI I ICH WPŁYW NA  
WŁASNOŚCI CHARAKTERYSTYK NIŻÓWKI.**  
**3. ŁĄCZNY ROZKŁAD PRAWDOPODOBIENSTWA  
CZASU TRWANIA I DEFICYTU NIŻÓWKI**

*Stanisław Węglarczyk, Katarzyna Baran-Gurgul*  
*Politechnika Krakowska*

***DROUGHT DEFINITION CRITERIA AND THEIR INFLUENCE  
ON THE DROUGHT CHARACTERISTICS.***  
***3. JOINT PROBABILITY DISTRIBUTION OF DROUGHT  
DURATION AND DEFICIT***

*Streszczenie*

Dla założonych 12 definicji niżówki znaleziono na podstawie 49-letnich szeregów czasowych dobowych przepływów w czterech wodowskazach w zlewni Małej Wisły, że łączny rozkład prawdopodobieństwa czasu  $T$  trwania niżówki oraz deficytu  $V$  niżówki może być opisany dwuwymiarowym rozkładem lognormalnym z pięcioma parametrami estymowanymi metodą największej wiarygodności. Jakość dopasowania badana była dwoma testami zgodności: testem Andersona-Darlinga i testem Craméra-von Misesa. Oba testy pozwalały na przyjęcie badanego rozkładu niezależnie od przyjętej definicji i wodowskazu, gdyż wartości  $p$  ( $p$ -values) obu testów były wyższe od 20%.

**Słowa kluczowe:** niżówka, definicja niżówki, czas trwania niżówki, deficyt niżówki, dwuwymiarowy rozkład lognormalny, test Andersona-Darlinga, test Craméra-von Misesa

### Summary

*For adopted 12 drought definitions and basing on 49-year time series of daily flows at four cross-sections in the Mała Wisła catchment, it was found that the probability distributions of drought duration  $T$  and drought deficit  $V$  may be described by the two-dimensional lognormal distribution with parameters estimated by the maximum likelihood method. The goodness-of-fit quality was tested by the Anderson-Darling and Cramér-von Mises tests. Both test did not reject the tested distributions neither for any definition nor any cross-section: all of the  $p$ -values were greater than 20%.*

**Key words:** *drought, drought definition, drought duration, drought deficit, two-dimensional lognormal probability distribution, Anderson-Darling test, Cramér-von Mises test*

### WSTĘP

Niżówka, zdefiniowana jako okres czasu charakteryzujący się przepływami przeważnie niższymi od zadanego, jest najczęściej charakteryzowana dwiema wielkościami: czasem trwania  $T$  oraz deficytem  $V$ . Wartości tych wielkości zależą od definicji niżówki i są traktowane jako zmienne losowe podlegające pewnemu rozkładowi prawdopodobieństwa. Rozkład ten może dotyczyć każdej z tych zmiennych z osobna, może też obejmować obie zmienne jednocześnie. W pracy (Węglarczyk S., 2014) znaleziono, że w większości badanych przypadków w zlewni Małej Wisły charakterystyki te można traktować jak zmienne losowe niezależne od czasu rozpoczęcia niżówki. W innej pracy (Węglarczyk S., Baran-Gurgul K., 2014) wykazana dostała bardzo dobra jakość opisu rozkładów zmiennych  $T$  i  $V$  za pomocą rozkładu lognormalnego z parametrami estymowanymi metodą największej wiarygodności.

Przyjęta definicja niżówki opierała się zadanych wartościach trzech wielkości:  $p$ ,  $T_{min}$ ,  $\tau_{min}$ . Pierwsza z nich oznacza średni procent czasu (liczby dni) w roku z przepływem nie mniejszym od  $Q_p$  lub, inaczej, gwarancję przepływu, i definiuje przepływ graniczny. Nieprzerwany okres czasu z przepływami poniżej przyjętej wartości granicznej  $Q_p$  to „surowa” niżówka. Jednakże bardzo krótkie niżówki nie mają znaczenia jako  $Q_p$  okres braku wody, stąd zwykle przyjmowany jest pewien minimalny czas trwania niżówki,  $T_{min}$  i niżówki trwające krócej są usuwane. Z drugiej strony, jeśli okres czasu pomiędzy kolejnymi niżówkami jest bardzo krótki, niżówki takie są traktowane jak niżówki zależne, tj. mające *de facto* tę samą przyczynę, i łączone w jedną. Do tego celu przyjmowany jest minimalny okres czasu pomiędzy kolejnymi niżówkami  $\tau_{min}$ . W pracy niniejszej przyjęto 4 wartości  $p$  spośród spotykanych w literaturze przedmiotu (Zelenhasić

E. i Salvai A., 1987; Tallaksen L. M. i Hisdal H., 1997; Stahl K., 2001; Fleig A., 2004; Jakubowski W., 2011; Kaznowska E. i Banasik K., 2011; Tallaksen L. M., Stahl K., Wong G., 2011; Tomaszewski E., 2011; Tokarczyk T., 2013):  $p = 60, 70, 80$  i  $90\%$ , oraz trzy pary wartości minimalnych ( $T_{min}, \tau_{min}$ ): (7;7), (14;7) i (14;14) dni. Łącznie wartości  $p$  i ( $T_{min}, \tau_{min}$ ) dawały  $4 \times 3 = 12$  definicji niżówki.

Celem pracy jest weryfikacja hipotezy, że dwuwymiarowy rozkład logarytmiczno-normalny może być użyty do opisu łącznego rozkładu prawdopodobieństwa czasu  $T$  trwania niżówki i jej deficytu  $V$ .

**Tabela 1.** Liczebności serii niżówek dla 12 definicji niżówki w czterech badanych wodowskazach

**Table 1.** Number of droughts for 12 drought definitions at the 4 investigated cross-sections

Rzeka/wodowskaz	$p$	Minimalny czas trwania niżówki i minimalny czas pomiędzy niżówkami ( $T_{min}, \tau_{min}$ ), doby		
		7-7	14-7	14-14
Wisła/Wisła	60%	207	154	126
	70%	174	127	110
	80%	128	91	96
	90%	69	51	57
Wisła/Ustroń	60%	217	157	133
	70%	166	117	111
	80%	120	85	83
	90%	74	43	48
Brennica/Górki Wielkie	60%	179	141	123
	70%	148	103	105
	80%	99	69	63
	90%	54	38	34
Wisła/Skoczów	60%	205	158	135
	70%	168	127	112
	80%	131	95	87
	90%	72	49	50

## WYKORZYSTANE DANE I METODA ANALIZY

Wzięte do analizy dane obejmowały okres 49 lat hydrologicznych (łącznie 17 898 dobowych przepływów) od 1.11.1955 r. do 31.10.2004 r. zarejestrowanych przez IMGW w czterech przekrojach w zlewni Małej Wisły: Wisła, Ustroń

i Skoczów na Wiśle oraz Górki Wielkie na Brennicy, prawym dopływem Wisły. Szczegółowe charakterystyki zlewni i przepływów są zamieszczone w pracy (Węglarczyk S., 2014). W tabeli 1 podane są liczebności serii niżówek w 4 badanych wodowskazach dla każdej z 12 definicji niżówki.

Przyjęto, że rozkład prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(T, V)$  może zostać opisany dwuwymiarowym pięcioparametrowym rozkładem lognormalnym o funkcji gęstości

$$f(t, v, \mu_T, \sigma_T, \mu_V, \sigma_V, \rho_{TV}) = \frac{1}{2\pi t v \sigma_T \sigma_V \sqrt{1 - \rho_{TV}^2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho_{TV}^2)} \left[ \left( \frac{\ln t - \mu_T}{\sigma_T} \right)^2 - 2\rho_{TV} \left( \frac{\ln t - \mu_T}{\sigma_T} \right) \left( \frac{\ln v - \mu_V}{\sigma_V} \right) + \left( \frac{\ln v - \mu_V}{\sigma_V} \right)^2 \right] \right\} \quad (1)$$

gdzie wartości  $t$  czasu trwania są pomniejszone o minimalny czas trwania niżówki  $T_{min}$ :  $t = T - T_{min} + 1$ .

Parametry  $\mu_T, \sigma_T, \mu_V, \sigma_V$  i  $\rho_{TV}$  estymowano metodą największej wiarygodności, co w tym przypadku daje proste równania na estymatory:

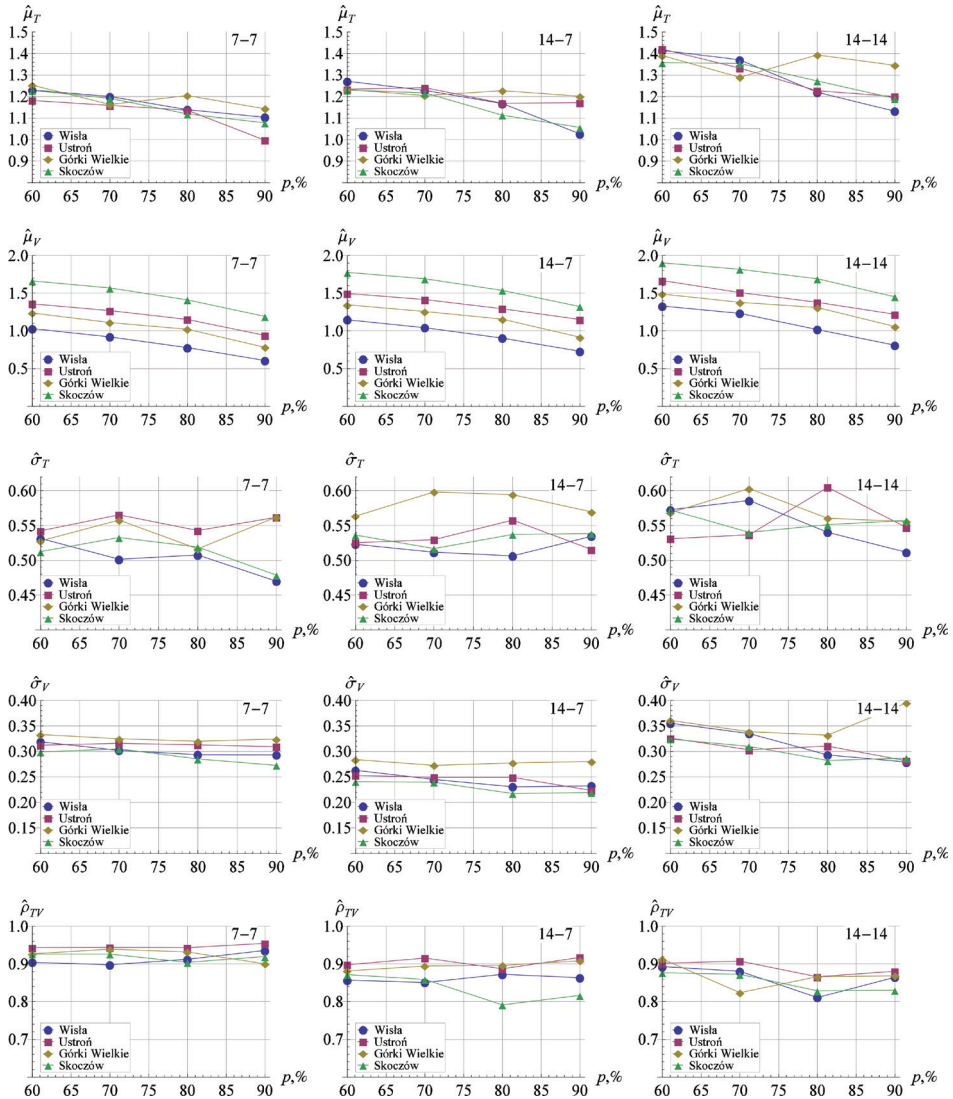
$$\begin{aligned} \hat{\mu}_T &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i & \hat{\mu}_V &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln v_i \\ \hat{\sigma}_T^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \hat{\mu}_T)^2 & \hat{\sigma}_V^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln v_i - \hat{\mu}_V)^2 \\ \hat{\rho}_{TV} &= \frac{1}{n \hat{\sigma}_T \hat{\sigma}_V} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \hat{\mu}_T)(\ln v_i - \hat{\mu}_V) \end{aligned} \quad (2)$$

Jakość dopasowania rozkładu lognormalnego do danych testowana była za pomocą dwu testów zgodności: testu Andersona-Darlinga i testu Craméra-von Misesa, odniesionych do przypadku dwuwymiarowego. Wartości  $p$  ( $p$ .) statystyk testowych obu testów liczone były za pomocą pakietu *Mathematica 9* firmy Wolfram Research.

## WYNIKI I DYSKUSJA

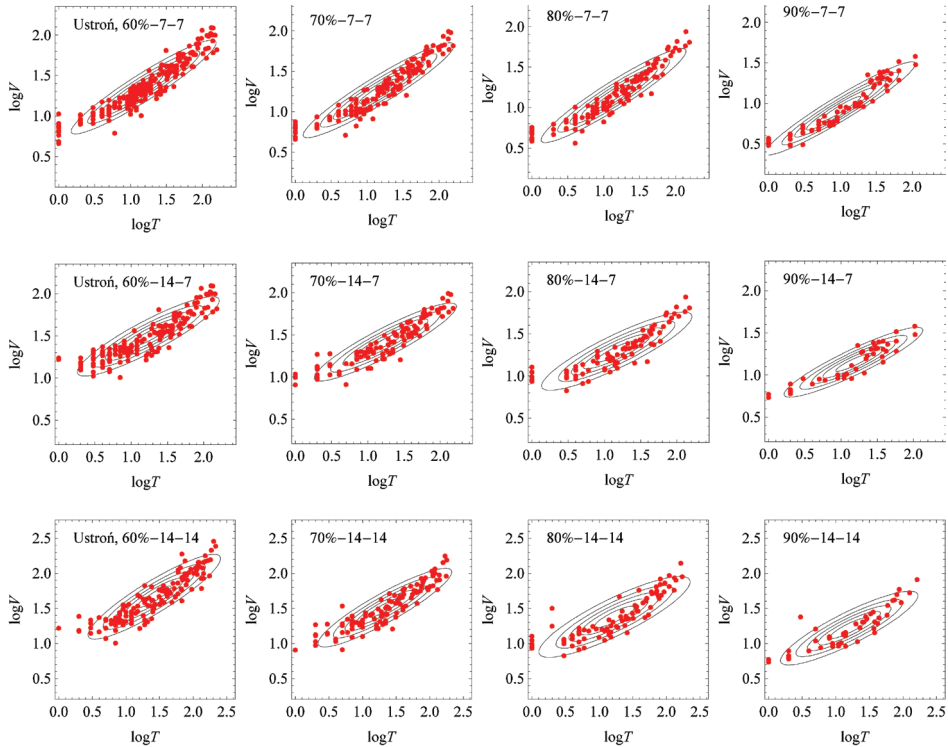
Na rys. 1 przedstawione zostały wyniki estymacji pięciu parametrów dwuwymiarowego rozkładu lognormalnego zmiennych  $(T, V)$  dla wszystkich 12 definicji niżówki i badanych wodowskazów w zależności od procentowego czasu  $p$  przekroczenia wartości granicznej  $Q_p$  przepływu.

Przebiegi  $\hat{\mu}_T(p)$  – średnich logarytmów czasu trwania niżówki – wykazują spadek z  $p$ . Pewnym wyjątkiem jest wodowskaz Górki Wielkie, którego  $\hat{\mu}_T(p)$  maleje najslabiej, a dla  $(T_{min}, \tau_{min}) = (14; 14)$  niemal wcale. Zmiana  $(T_{min}, \tau_{min})$  z  $(7; 7)$  na  $(14; 7)$  i potem na  $(14; 14)$  dni powoduje niewielkie zwiększenie  $\hat{\mu}_T(p)$ . Wartości odpowiadających sobie  $\hat{\mu}_T(p)$  dla badanych wodowskazów są na ogół zbliżone, jednak ich rozrzut zwiększa się z  $p$ .



**Rysunek 1.** Estymowane metodą największej wiarygodności ( $\hat{\mu}_T, \hat{\sigma}_T, \hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V, \hat{\rho}_{TV}$ ) wartości parametrów dwuwymiarowego lognormalnego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych  $(T, V)$ , tj. czasu trwania  $T$  i deficytu  $V$  niżówki, w badanych wodowskazach w zależności od względnego średniego czasu  $p$  przekroczenia w roku (gwarancji) przepływu progowego  $Q_p$  dla przyjętych trzech par wartości  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

**Figure 1.** The maximum likelihood parameters ( $\hat{\mu}_T, \hat{\sigma}_T, \hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V, \hat{\rho}_{TV}$ ) of 2-D lognormal probability distribution of  $(T, V)$ , i.e., drought duration  $T$  and deficit  $V$ , at the studied cross-sections versus mean percent time  $p$  of exceedance of the threshold flow  $Q_p$  for the three adopted pairs of values  $(T_{min}, \tau_{min})$ .



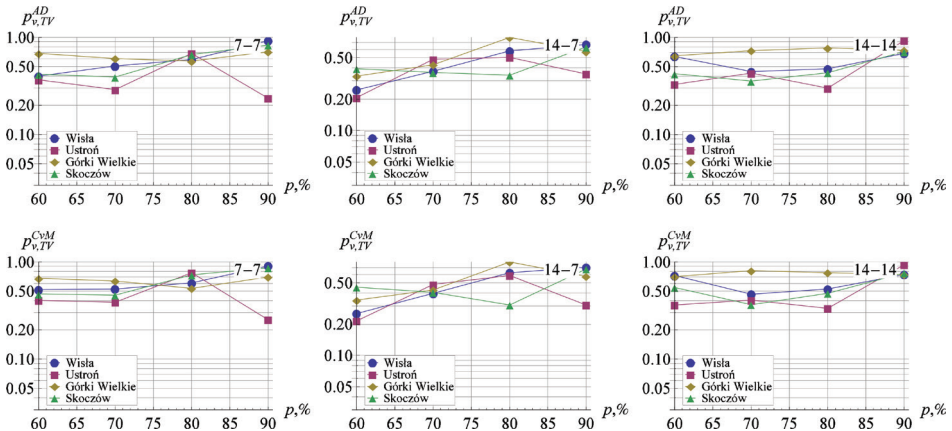
**Rysunek 2.** Przykładowe, dla stacji wodowskazowej Ustroń, wykresy współzależności logarytmów deficytu  $V$  i czasu trwania niżówki (punkty) wraz z izoliniami gęstości prawdopodobieństwa dwuwymiarowego rozkładu lognormalnego zmiennych  $(T, V)$  o parametrach  $(\hat{\mu}_T, \hat{\sigma}_T, \hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V, \hat{\rho}_{TV})$  dla kolejnych wartości względnego średniego czasu  $p$  przekroczenia w roku przepływu progowego  $Q_p$  i 3 przyjętych par wartości  $(T_{min}, \tau_{min})$ . **Figure 2.** Exemplary, for the Ustroń cross-section, graphs of dependence between logarithms of deficit  $V$  and drought duration  $T$  (points) and the contour lines of lognormal joint probability density function of variables  $(T, V)$  with parameters  $(\hat{\mu}_T, \hat{\sigma}_T, \hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V, \hat{\rho}_{TV})$  for mean percent time  $p$  of exceedance per year of the threshold flow  $Q_p$  for three adopted pairs values of  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

Przebiegi drugiego parametru – średnich logarytmów deficytu niżówki  $\hat{\mu}_V(p)$  – bardzo regularnie maleją z  $p$ . Linie tego parametru układają się w porządku wielkości zlewni: najwyższe wartości mają  $\hat{\mu}_V(p)$  dla Skoczowa, potem Ustronia, Górek Wielkich i najmniejsze – dla Wisły i są niemal równoległe. Kolejne zmiany zmiany  $(T_{min}, \tau_{min})$  z (7;7) na (14;7) i potem na (14;14) dni zwiększają odpowiednie wartości  $\hat{\mu}_V(p)$ .

Odchylenia standardowe logarytmów czasu trwania niżówki  $\hat{\sigma}_T(p)$ , przedstawione na rys. 1 nie wykazują wyraźnej monotoniczności; globalny ogląd tych wykresów sugeruje prawie niezmiennosc z  $p$  i niewielki (jeśli wcale) wzrost ze zmianą pary  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

Analogiczne przebiegi  $\hat{\sigma}_V(p)$  wydają się lekko maleć z  $p$ ; a więc inaczej niż to miało miejsce dla  $\hat{\sigma}_T(p)$ . Natomiast zmiana  $(T_{min}, \tau_{min})$  z (7;7) na (14;7) – czyli podwyższenie minimalnego czasu trwania do 14 dni – powoduje wyraźną redukcję zmienności deficytu niżówek, co widać na rys. 1 jako zmniejszenie wartości  $\hat{\sigma}_V(p)$ . Podwyższenie minimalnego czasu pomiędzy kolejnymi niżówkami  $\tau_{min}$  do 14 dni przyniosło zwiększenie zmienności deficytu niżówek nieco ponad poziom (7-7) ze spadkiem nieco większym, niż w tym ostatnim przypadku.

Ostatni parametr, współczynnik korelacji logarytmów czasu trwania i deficytu niżówki  $\hat{\rho}_{TV}(p)$ , wykazuje wysokie i stałe wartości dla  $(T_{min}, \tau_{min}) = (7;7)$ : 90% lub więcej. Zmiana  $(T_{min}, \tau_{min})$  na (14;7) i potem na (14;14) dni powoduje lekki spadek  $\hat{\rho}_{TV}(p)$  i zwiększenie nierównomierności przebiegu tego parametru z  $p$ .



**Rysunek 3.** Wartości p testu Andersona-Darlinga (AD) i Craméra-von Misesa (CvM) hipotezy  $H_0$ , że czas  $T$  trwania i deficyt  $V$  niżówki podlegają dwuwymiarowemu lognormalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa z parametrami  $(\hat{\mu}_T, \hat{\sigma}_T, \hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V, \hat{\rho}_{TV})$  w funkcji względnego średniego czasu  $p$  przekroczenia w roku przepływu progowego  $Q_p$  dla 3 przyjętych par wartości  $(T_{min}, \tau_{min})$ .

**Figure 3.** p-values of the Anderson-Darling (AD) and Cramér-von Mises (CvM) test hypothesis  $H_0$  that the drought duration  $T$  and deficit  $V$  has lognormal joint probability distribution with estimated parameters  $(\hat{\mu}_T, \hat{\sigma}_T, \hat{\mu}_V, \hat{\sigma}_V, \hat{\rho}_{TV})$  versus mean time  $p$  of exceedance per year of the threshold flow  $Q_p$  for three adopted pairs values of  $(T_{min}, \tau_{min})$ .



Jakość zgodności znalezionych dwuwymiarowych rozkładów lognormalnych z danymi pomiarowymi jest przykładowo, dla stacji wodowskazowej Ustroń, zilustrowana na rys. 2, a szczegółowe informacje dla wszystkich definicji niżówki i stacji podane są na rys. 3. Wykreślone na rys. 2 izolinie funkcji gęstości tego rozkładu bardzo dobrze korelują z wartościami pomiarowymi, niezależnie od definicji niżówki.

Liczbowe informacje o jakości dopasowania znalezionych rozkładów – wartości  $p$  testów Andersona-Darlinga i Craméra-von Misesa dla dwuwymiarowego przypadku – są przedstawione na rys. 3. Wartości te znacznie przekraczają zwyczajowy 5% poziom testu: najmniejsze z nich przekraczają 20% dla pierwszych dwu par  $(T_{min}, \tau_{min})$ , a dla trzeciej, (14;14) dni, przekraczają 30%. Wyniki te stwarzają obiecującą perspektywę dla dwuwymiarowego modelowania własności niżówek.

### PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Dla przyjętych 12 definicji niżówki znaleziono na podstawie 49-letnich szeregów czasowych dobowych przepływów w czterech wodowskazach w zlewni Małej Wisły, że łączne rozkłady prawdopodobieństwa czasu  $T$  trwania niżówki i deficytu  $V$  niżówki mogą być opisane dwuwymiarowym rozkładem logarytmiczno-normalnym z parametrami estymowanymi metodą największej wiarygodności. Jakość dopasowania, testowana dwoma testami zgodności: testem Andersona-Darlinga i testem Craméra-von Misesa, była wysoka. Oba testy pozwalały na przyjęcie badanego rozkładu zmiennych  $(T, V)$  niezależnie od przyjętej definicji i wodowskazu, a obliczone wartości prawdopodobieństwa testowego, wartości  $p$ , w większości przypadków znacznie przekraczały najmniejszą wartość ok. 20% dla pierwszych dwu par  $(T_{min}, \tau_{min})$ , a dla trzeciej, (14;14) dni, przekraczały 30%. Wniosek, jaki stąd wynika, pozwala z optymizmem patrzeć na możliwość dwuwymiarowego modelowania własności niżówek w innych wodowskazach.

Praca została wykonana w ramach tematu *Ś-1/378/2013/DS Wpływ czynników antropogennych na ilościowe i jakościowe właściwości procesów hydrologicznych w zlewni*, zadanie 3: *Analiza własności niżówek w obszarze karpackim zlewni Górnej Wisły*.

### LITERATURA

Gustard, A., Bullock, A., Dixon, J.M. (1992). *Low flow estimation in the United Kingdom*. Institute of Hydrology, Report No. 108, 88 s.



- Fleig A. (2004). *Hydrological Drought – a comparative study using daily discharge series from around the world*, der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br., Diplomarbeit, Freiburg, 2004
- Jakubowski W. (2011). Rozkłady prawdopodobieństwa w ocenie suszy hydrologicznej, Wrocław: Uniwersytet Przyrodniczy, 177 s.
- Kaznowska E., Banasik K. (2011). Streamflow droughts and probability of their occurrence in a small agricultural catchment, Ann. Warsaw Univ. of Life Sci. – SGGW, Land Reclam. 43 (1), 57-69
- Stahl K. (2001). Hydrological Drought – a Study across Europe, Institut für Hydrologie der Universität Freiburg i. Br., Freiburg, 129 s.
- Tallaksen L. M., Hisdal H. (1997). *Regional analysis of extreme streamflow drought duration and deficit volume*, FRIEND '91 — Regional Hydrology: Concepts and Models for Sustainable Water Resource Management IAI, (Proceedings of the Postojna, Slovenia, Conference, September-October 1997). IAHS Publ. no. 246
- Tallaksen, L. M., Stahl, K., Wong, G. (2011). Space-time characteristics of large-scale droughts in Europe derived from streamflow observations and WATCH multi-model simulations, WATCH Technical Report Number 48, 20 s.
- Tokarczyk T. (2013). Classification of low flow and hydrological drought for a river basin, Acta Geophysica 61(2), 404-421
- Tomaszewski E. (2011). Defining the threshold level of hydrological drought in lake catchments, Limnological Review 11(2), 81-88
- Zelenhasić E. Salvai A. (1987). A Method of Streamflow Drought Analysis, *Water Resour. Res.*, 23(1), 156–168
- Węglarczyk, S. (2014). Kryteria definicyjne niżówki i ich wpływ na własności charakterystyk niżówki. 1. Stacjonarność niżówek. *Infrastruktura i ekologia terenów wiejskich*, Nr II/1, s.251-263
- Węglarczyk, S., Baran-Gurgul K. (2014). Kryteria definicyjne niżówki i ich wpływ na własności charakterystyk niżówki. 2. Jednowymiarowe rozkłady prawdopodobieństwa. *Infrastruktura i ekologia terenów wiejskich*, Nr IV/2, s.1145-1154.

Prof. dr hab. Stanisław Węglarczyk  
Politechnika Krakowska  
Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków  
e-mail: sweglarc@iigw.pl

Mgr inż. Katarzyna Baran-Gurgul  
Politechnika Krakowska  
Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków  
e-mail: kbg@iigw.pl