



## **ANALIZA DOKŁADNOŚCI STATYCZNYCH POMIARÓW SATELITARNYCH WYKONYWANYCH ODBIORNIKIEM TRIMBLE NETR9**

**Zbigniew Siejka<sup>1</sup>, Waldemar Krupiński<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Uniwersytet Rolniczy im. H. Kołłątaja w Krakowie

<sup>2</sup> Wyższa Szkoła Biznesu i Przedsiębiorczości w Ostrowcu Świętokrzyskim

### **ANALYSIS OF THE PRECISION OF STATIC SATELLITE MEASUREMENTS MADE WITH THE TRIMBLE NETR9 RECEIVER**

#### ***Streszczenie***

W pracy przedstawiono sposób przeprowadzenia badania dokładności i poprawności pomiarów satelitarnych wykonywanych odbiornikiem firmy Trimble, model NetR9 z anteną Zephyr Geodetic Model 2 (TRM55971.00 TZGD), która wyposażona była dodatkowo w osłonę przeciwsłoneczną. Badaniom poddano wyniki pomiarów statycznych, w postaci współrzędnych geocentrycznych XYZ, obliczonych za pomocą automatycznego serwisu POZGEO, działającego w systemie ASG-E-UPOS. Obserwacje wykonane były w sesjach pomiarowych: 1h, 2h i 3h. Badania statystyczne zostały przeprowadzone w celu sprawdzenia, czy rozkłady błędów odpowiadają rozkładowi normalnemu, co stanowiłoby kryterium poprawności wykonanych pomiarów i obliczeń testowych a w konsekwencji decydowało o przydatności badanego odbiornika satelitarnego do wykonywania precyzyjnych pomiarów geodezyjnych.

Dla oceny poprawności wykonanych pomiarów i obliczeń zastosowano trzy testy statystyczne: test parametrów, statystykę  $D'$  Kolmogorowa, oraz statystyki  $V$  i  $V'$  Kuipera. Na podstawie przeprowadzonych badań i analiz opracowano wnioski dotyczące dokładności

wyników pomiarów i obliczeń oraz przydatności badanego zestawu pomiarowego do wykonywania różnego rodzaju zadań geodezyjnych.

**Słowa kluczowe:** GNSS, ASG-EUPOS, test statystyczny, hipoteza zero-wa, hipoteza alternatywna

### *Summary*

*The paper presents the method of testing the precision and accuracy of satellite measurements made with the Trimble NetR9 receiver model with a Zephyr Geodetic Model 2 antenna (TRM55971.00 TZGD), which was additionally equipped with a snow shield. The tests covered the results of static measurements in the form of geocentric coordinates XYZ, calculated with the automatic POZGEO service, operating under the ASG-EUPOS system. The observations were made in measuring sessions of 1h, 2h, and 3h. The statistical tests were conducted to check if the distributions of their errors correspond to normal distribution, which would determine the accuracy of the performed test calculations and measurements, and consequently the usefulness of the tested satellite receiver in geodetic surveys.*

*The correctness tests of the executed measurements and calculations applied three statistical tests: the parametric test, the  $D'$  Kolmogorov statistic, and the  $V$  and  $V'$  Kuiper statistics. The conducted analyses and studies provided conclusions on the correctness of the survey and calculation results and the usefulness of the tested measurement system in the execution of various geodetic operations.*

**Key words:** GNSS, ASG-EUPOS, statistical test, the null hypothesis, alternative hypothesis

## WPROWADZENIE

Celem niniejszego opracowania jest sprawdzenie prawidłowości pozycjonowania satelitarnego w trybie statycznym za pomocą wybranego odbiornika GNSS i ocena faktycznej dokładności pomiarów, jakie można uzyskać w określonych warunkach terenowych przy wykorzystaniu przyjętej techniki pomiarowej i zastosowanej procedury obliczeniowej.

Pomiary stanowiące podstawę obliczeń i analiz zostały wykonane w Krakowie na bazie testowej zlokalizowanej w rejonie ulicy Balickiej w Krakowie na terenie kampusu Uniwersytetu Rolniczego (rys. 1). Stacja KRUR, której wyniki pomiarów wykorzystano w niniejszej pracy prowadzi permanentne obserwacje sygnałów GPS/GLONASS w interwale 1s. Na ich podstawie wygenerowano obserwacje po 32 pliki obserwacyjne w trzech sesjach pomiarowych:

1h, 2h, 3h. Następnie za pomocą serwisu POZGEO w systemie ASG-EUPOS wykonano obliczenia współrzędnych w układzie kartezjańskim X, Y, Z. W kolejnym etapie uzyskane w ten sposób wyniki pomiarów i obliczeń poddano ocenie i analizom statystycznym.

Wynikiem badań było określenie dokładności testowanego zestawu pomiarowego, którą wyrażono w postaci estymatorów odchylenia standardowego dla współrzędnych (XYZ) wyznaczanych punktów.

W drugim etapie przeprowadzono badania zgodności rozkładu błędów empirycznych z teoretycznym rozkładem  $N(0;1)$ , które miało na celu zbadanie poprawności pomiarów testowych badanego odbiornika satelitarnego oraz przyjętej procedury obliczeniowej.



**Rysunek 1.** Lokalizacja punktu kontrolnego – widok na antenę Zephyr Geodetic Model 2

**Figure 1.** Checkpoint location – view of the Zephyr Geodetic Model 2 antenna

## **TEORETYCZNE PODSTAWY PRZEPROWADZONYCH BADAŃ I WYNIKI TESTÓW**

Wyniki przeprowadzonych pomiarów i obliczeń testowych poddano analizie statystycznej przy zastosowaniu trzech testów statystycznych.

**1. Testu parametrów**, porównując rozkłady błędów empirycznych z założonym rozkładem teoretycznym. W obliczeniach wykorzystano parametry określone wzorami (Greń J. 1970), (Krysicki W., i in. 1986) w postaci:

- wartości przeciętnej zmiennej losowej (średnia arytmetyczna)
- wariancji zmiennej losowej i odchylenia standardowego
- współczynnika asymetrii (skośność)  $S$
- współczynnika spłaszczenia (ekscesy)  $e$
- błędów średnich odpowiednio:  $m_e$  i  $m_s$

Obliczeń dokonano za pomocą wzorów:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

$$V(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

$$S = \frac{n}{(n-1) \cdot (n-2)} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^3 \quad (3)$$

$$m_s = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} \quad (4)$$

$$e = \left\{ \frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^4 \right\} \frac{3(n-1)^2}{(n-2) \cdot (n-3)} \quad (5)$$

$$m_e = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \quad (6)$$

Celem analiz było stwierdzenie czy rozkład empiryczny uzyskanych błędów pomiarowych jest zgodny z założonym rozkładem teoretycznym (normalnym), co jest dowodem poprawności wykonywanych pomiarów testowych oraz braku występowania ewentualnych błędów systematycznych. W tym celu należy porównać odpowiednie parametry rozkładu normalnego z badanym rozkładem empirycznym.

Za rozkład teoretyczny przyjmuje się rozkład normalny, dla którego wartości ekscesy i skośności wynoszą zero:

$$e = 0 \text{ oraz } S = 0$$

Jeżeli różnice między wartościami empirycznymi a teoretycznymi rozkładu nie przekraczają dwukrotnej wartości ich błędów średnich, można przyjmując hipotezę  $H_0$  o zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem normalnym

(Ney B., 1970). W przeciwnym razie hipotezę zerową ( $H_0$ ) należy odrzucić na określonym poziomie istotności. Wyniki obliczeń zawiera tabela 1.

**Tabela 1.** Zestawienie wyników testu parametrów  
**Table 1.** Comparison of the parametric test results

Zmienna	$\bar{X}$ (m)	V(x) (m)	$\sigma$ (m)	S	$m_s$	e	$m_e$	$S < 2m_s$	$e < 2m_e$
X <sub>1h</sub>	3857221.444	0.000207	0.014404	1.160635	0.401297	4.909186	0.732729	NIE	NIE
X <sub>2h</sub>	3857221.446	0.000153	0.012377	-0.29475	0.401297	0.751427	0.732729	TAK	TAK
X <sub>3h</sub>	3857221.446	0.000112	0.010573	-0.30367	0.401297	-0.02744	0.732729	TAK	TAK
Y <sub>1h</sub>	1392714.287	0.000075	0.008674	0.604622	0.401297	2.942691	0.732729	TAK	NIE
Y <sub>2h</sub>	1392714.289	0.000065	0.008070	0.428986	0.401297	2.333471	0.732729	TAK	NIE
Y <sub>3h</sub>	1392714.289	0.000059	0.007672	0.223550	0.401297	1.408364	0.732729	TAK	TAK
Z <sub>1h</sub>	4868936.333	0.000332	0.018210	1.303135	0.401297	2.449643	0.732729	NIE	NIE
Z <sub>2h</sub>	4868936.336	0.000233	0.015268	0.421323	0.401297	0.615932	0.732729	TAK	TAK
Z <sub>3h</sub>	4868936.336	0.000184	0.013566	0.621842	0.401297	0.243192	0.732729	TAK	TAK

Źródło: Badania własne  
 Source: Own calculation

## 2. Statystyki $D'$ Kołmogorowa

Test Kołmogorowa jest testem zgodności, przeprowadzonym w celu weryfikacji hipotezy o normalności rozkładu błędów pomiarowych. Wartość statystyki znajdujemy stosując następujące wzory (Kasietczuk B., 1993):

$$D^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left[ \frac{i}{n} - z_i \right] \tag{7}$$

$$D^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left[ z_i - \frac{(i-1)}{n} \right] \tag{8}$$

$$D = \max(D^+, D^-) \tag{9}$$

$$D' = \left( \sqrt{n} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{n}} \right) \cdot D \tag{10}$$

Szczegółowe obliczenia parametrów zawiera tabela 2.

**Tabela 2.** Przykładowe obliczenia do statystyk Kołmogorowa oraz Kuipera (współrzędna X czas obserwacji – 1h)  
**Table 2.** Sample calculations for the Kolmogorov’s and Kuiper’s statistics (coordinate X, observation time – 1h)

n	$x_i$ (m)	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$	$z_i = F(u_i)$	i/n	(i-1)/n	$\frac{i/n - z_i}{D^{+i}}$	$\frac{z_i - (i-1)/n}{D^{-i}}$
1	-0.036	-0.035	0.001197	-2.40	0.0081980	0.03125	0.00000	0.023052	0.008198
2	-0.018	-0.017	0.000275	-1.15	0.1251000	0.06250	0.03125	-0.062600	0.093850
3	-0.018	-0.017	0.000275	-1.15	0.1251000	0.09375	0.06250	-0.031350	0.062600
4	-0.016	-0.015	0.000213	-1.01	0.1562000	0.12500	0.09375	-0.031200	0.062450
5	-0.011	-0.010	0.000092	-0.67	0.2483000	0.15625	0.12500	-0.092050	<b>0.123300</b>
6	-0.010	-0.009	0.000074	-0.60	0.2743000	0.18750	0.15625	-0.086800	0.118050
7	-0.010	-0.009	0.000074	-0.60	0.2743000	0.21875	0.18750	-0.055550	0.086800
8	-0.009	-0.008	0.000058	-0.53	0.2981000	0.25000	0.21875	-0.048100	0.079350
9	-0.008	-0.007	0.000043	-0.46	0.3228000	0.28125	0.25000	-0.041550	0.072800
10	-0.008	-0.007	0.000043	-0.46	0.3228000	0.31250	0.28125	-0.010300	0.041550
11	-0.008	-0.007	0.000043	-0.46	0.3228000	0.34375	0.31250	0.020950	0.010300
12	-0.006	-0.005	0.000021	-0.32	0.3745000	0.37500	0.34375	0.000500	0.030750
13	-0.004	-0.003	0.000007	-0.18	0.4286000	0.40625	0.37500	-0.022350	0.053600
14	-0.004	-0.003	0.000007	-0.18	0.4286000	0.43750	0.40625	0.008900	0.022350
15	-0.003	-0.002	0.000003	-0.11	0.4562000	0.46875	0.43750	0.012550	0.018700
16	-0.003	-0.002	0.000003	-0.11	0.4562000	0.50000	0.46875	0.043800	-0.012550
17	-0.003	-0.002	0.000003	-0.11	0.4562000	0.53125	0.50000	0.075050	-0.043800
18	-0.002	-0.001	0.000000	-0.04	0.4840000	0.56250	0.53125	0.078500	-0.047250
19	-0.002	-0.001	0.000000	-0.04	0.4840000	0.59375	0.56250	0.109750	-0.078500
20	-0.001	0.000	0.000000	0.03	0.5080000	0.62500	0.59375	0.117000	-0.085750
21	0.000	0.001	0.000002	0.10	0.5398000	0.65625	0.62500	0.116450	-0.085200
22	0.001	0.002	0.000006	0.17	0.5675000	0.68750	0.65625	0.120000	-0.088750
23	0.002	0.003	0.000012	0.24	0.5948000	0.71875	0.68750	0.123950	-0.092700
24	0.004	0.005	0.000029	0.38	0.6480000	0.75000	0.71875	0.102000	-0.070750
25	0.005	0.006	0.000041	0.44	0.6700000	0.78125	0.75000	0.111250	-0.080000
26	0.005	0.006	0.000041	0.44	0.6700000	0.81250	0.78125	<b>0.142500</b>	-0.111250
27	0.007	0.008	0.000071	0.58	0.7157000	0.84375	0.81250	0.128050	-0.096800
28	0.012	0.013	0.000180	0.93	0.8238000	0.87500	0.84375	0.051200	-0.019950
29	0.012	0.013	0.000180	0.93	0.8238000	0.90625	0.87500	0.082450	-0.051200
30	0.017	0.018	0.000339	1.28	0.8997000	0.93750	0.90625	0.037800	-0.006550

n	$x_i$ (m)	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$	$z_i = F(u_i)$	$i/n$	$(i-1)/n$	$\frac{i/n - z_i}{D^+}$	$\frac{z_i - (i-1)/n}{D^-}$
31	0.020	0.021	0.000458	1.49	0.9318900	0.96875	0.93750	0.036860	-0.005610
32	0.050	0.051	0.002643	3.57	0.9998215	1.00000	0.96875	0.000178	0.031072
$\Sigma$		0.000	0.006	0.000	15.4391095	16.5000	15.5000	-0.092050	-0.111250
$\bar{x}$	-0.001								

Źródło: Badania własne  
Source: Own calculation

$$D^+ = 0,1425$$

$$D^- = 0,1233$$

$$D = \max(D^+, D^-) = 0,1425$$

$$V(x) = 0.00021$$

$$\sigma(X) = 0.01440$$

$$D' = \left( \sqrt{n} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{n}} \right) \cdot D = \left( \sqrt{32} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{32}} \right) \cdot 0,1425 = 0,783$$

$$\text{Dla } \alpha = 0,05 : D'_{\text{krytyczne}} = 0,896 > 0,783 = D'$$

Ponieważ test jest prawostronny, powyższa nierówność świadczy o normalnym rozkładzie błędów pomiarowych, a więc również o poprawności wyznaczenia współrzędnych za pomocą wybranego odbiornika Net R9. Wyniki obliczenia statystyk dla pozostałych analiz zestawiono w tabeli 3.

### 3. Statystyka $V$ oraz $V'$ Kuipera

Wartości tych statystyk oblicza się ze wzorów (Kasietczuk B. 1993):

$$V = D^+ + D^- \tag{11}$$

$$V_1 = \left( \sqrt{n} + 0,05 + \frac{0,82}{\sqrt{n}} \right) \cdot V \tag{12}$$

gdzie:  $D^+$  oraz  $D^-$  według wzorów statystyki Kołmogorowa (Kasietczuk B., 1993), (Krysicki W., i in., 1986).

Obliczenia:

$$V = D^+ + D^- = 0,2658$$

$$V_1' = \left( \sqrt{32} + 0,05 + \frac{0,82}{\sqrt{32}} \right) \cdot 0,2658 = 1,5554 \approx 1,555$$

$$\text{Dla } \alpha = 0,05 : V_{1\text{krytyczne}}' = 1,489 < 1,555 = V_1'$$

Ponieważ test jest prawostronny, nierówność ta świadczy o tym, że rozkład błędów pomiarowych nie ma charakteru normalnego. Obliczenia statystyk dla pozostałych analizowanych rozwiązań dla testu Kuipera zestawiono w tabeli 3.

**Tabela 3.** Wyniki testów statystyki Kolmogorowa i Kuipera  
**Table 3.** Test results of the Kolmogorov and Kuiper statistics

Zmienna	Statystyka D Kolmogorowa $D'_k = 0.896$		Statystyka V Kuipera $V_{1k}$ $V'_{1k} = 1.489$	
	Obliczona wartość statystyki $D'$	Wynik testu	Obliczona wartość statystyki $V'_1$	Wynik testu
$X_{1h}$	0.783	$D'_k > D'$	1.555	$V'_{1k} < V'_1$
$X_{2h}$	0.331	$D'_k > D'$	0.667	$V'_{1k} > V'_1$
$X_{3h}$	0.572	$D'_k > D'$	0.968	$V'_{1k} > V'_1$
$Y_{1h}$	1.049	$D'_k < D'$	1.935	$V'_{1k} < V'_1$
$Y_{2h}$	1.019	$D'_k < D'$	1.886	$V'_{1k} < V'_1$
$Y_{3h}$	0.965	$D'_k < D'$	1.940	$V'_{1k} < V'_1$
$Z_{1h}$	0.749	$D'_k > D'$	1.288	$V'_{1k} > V'_1$
$Z_{2h}$	0.626	$D'_k > D'$	1.147	$V'_{1k} > V'_1$
$Z_{3h}$	3.134	$D'_k < D'$	3.884	$V'_{1k} < V'_1$

Źródło: Badania własne  
 Source: Own calculation

## WNIOSKI

1. Z testu parametrów wynika, że:

a) dla sesji jednogodzinnych rozkłady błędów współrzędnych ( $X_{1h}$ ,  $Y_{1h}$ ,  $Z_{1h}$ ) nie są rozkładami normalnymi. Pomiarzy lub zastosowane procedury obliczeniowe wykazują zbyt niską dokładność lub występowanie błędów systematycznych,

b) w związku z powyższym dla sesji jednogodzinnych celem pełniejszej oceny ewentualnych błędów systematycznych pojawiających się w wynikach pomiarów proponuje się przeprowadzenie analiz zmian długości wektorów



GPS wyznaczających współrzędne punktu wyznaczanego w poszczególnych sesjach pomiarowych,

c) dla sesji dwugodzinnych (z wyjątkiem  $Y_{2h}$  gdzie występuje zbyt duże spłaszczenie) można przyjąć, że rozkład empiryczny jest zgodny z rozkładem normalnym, co świadczyłoby o braku występowania znaczących błędów systematycznych,

d) dla sesji trzygodzinnych obserwacje są wykonywane poprawnie i nie zawierają błędów.

2. Na podstawie testu D' Kołmogorowa możemy stwierdzić, że:

a) współrzędne X dla wszystkich trzech sesji pomiarowych wykazują się normalnym rozkładem błędów, w przeciwieństwie do współrzędnych Y,

b) wysokości dla sesji jedno i dwugodzinnych ( $Z_{1h}$ ,  $Z_{2h}$ ) charakteryzują się normalnym rozkładem błędów, natomiast sesja trzygodzinna ( $Z_{3h}$ ) jest obciążona większymi błędami.

3. Wyniki testu V' Kuipera wykazały, że:

a) współrzędne X dla sesji dwu i trzygodzinnych ( $X_{2h}$ ,  $X_{3h}$ ) oraz współrzędne Z dla sesji jedno i dwugodzinnych ( $Z_{1h}$ ,  $Z_{2h}$ ) nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o rozkładzie normalnym ich błędów pomiarowych,

b) natomiast wyniki pomiarów dla: współrzędnej Y we wszystkich trzech sesji pomiarowych ( $Y_{1h}$ ,  $Y_{2h}$ ,  $Y_{3h}$ ), współrzędnej X dla sesji jednogodzinnych ( $X_{1h}$ ) oraz Z dla sesji trzygodzinnych ( $Z_{3h}$ ) nie charakteryzują się rozkładem normalnym.

4. Pewne rozbieżności w wynikach porównawczych testów można tłumaczyć ich różną mocą, np. widać, że testy D' oraz V' stawiają wyższe warunki niż test parametrów. Drugą przyczynę drobnych różnic między wynikami testów można natomiast wyjaśnić przyjętym poziomem istotności  $\alpha$ . W przypadku  $\alpha = 0.05$  zakładana jest z góry możliwość złej odpowiedzi testu w pięciu przypadkach na sto.

5. W przypadku, gdy stosowany test statystyczny prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej ( $H_0$ ) o normalnym rozkładzie błędów – wyrównywanie badanych obserwacji nie powinno być przeprowadzane metodą najmniejszych kwadratów, lecz innymi metodami, np. metodą największej wiarygodności (Wiśniewski Z., 1986).

## LITERATURA

- Greń, J. (1970). Modele i zadania statystyki matematycznej. PWN, Warszawa.
- Kasietczuk, B. (1993). Analiza statystyczna geodezyjnej sieci testowej „Kortowo 2”. Zeszyty Naukowe AR-T, Olsztyn, nr 23.
- Krysicki, W. i in. (1986). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Cz. II. Statystyka matematyczna. PWN, Warszawa.

Wiśniewski, Z. (1986). Wyrównanie sieci geodezyjnych z zastosowaniem probabilistycznych modeli błędów pomiarów. Acta Acad. Agricult. Techn. Olst., Geodaisia et Ruris Regulatio, No 15, Supplementum C (praca habilitacyjna).

dr inż. Zbigniew Siejka  
Uniwersytet Rolniczy  
Katedra Geodezji  
University of Agriculture in Krakow  
Department of Land Surveying  
ul. Balicka 253a  
30-198 Kraków  
e-mail: rmsiejka@cyf-kr.edu.pl

dr hab. inż. Waldemar Krupiński, prof. WSBiP  
University of Business and Enterprise  
ul. Akademicka 12  
Ostrowiec Świętokrzyski  
telefon: +48 12 6624512