

*Bartosz Mitka, Izabela Piech*

## **MODELOWANIE POWIERZCHNI TERENU**

---

### **MODELLING OF TERRAIN SURFACE**

#### **Streszczenie**

Od wielu lat modele 3D reprezentujące powierzchnię terenu znajdują zastosowanie w różnych dziedzinach nauki i inżynierii. W pracy pokazano i opisano proces implementacji danych do NMT, dokonano przeglądu metod tworzenia NMT opartych na siatkach TIN i GRID. Przedstawiono też metody tworzenia siatek TIN. Opisano również metody interpolacji wysokości w modelach rastrowych na podstawie danych pomiarowych z wykorzystaniem różnego typu algorytmów.

**Słowa kluczowe:** model, modelowanie powierzchni, Numeryczny Model Terenu

#### **Summary**

*For many years 3D models representing the terrain surface are used in various fields of science and engineering. The paper shows and describes the process of data implementation to the DTM, and reviews methods of creating DTM based on the TIN and GRID meshes. The paper presents methods for creating TIN meshes. It also describes the method of height interpolation in raster models based on the measurement data using various algorithms.*

**Key words:** model, surface modeling, digital terrain model

#### **WPROWADZENIE**

Od wielu lat w różnych dziedzinach nauki tworzone są modele wszelkiego typu przedmiotów, zjawisk, procesów. Głównym zadaniem modeli jest przybliżone odtworzenie właściwości i cech badanego obiektu. W ramach badań nad strukturą przestrzenną, rozmieszczeniem elementów w przestrzeni, bądź efektywnością jej wykorzystania trudno jest ograniczać się do modeli dwuwymiarowych. Płaskie modele w ujęciu kartograficznym, są reprezentowane przez róż-

nego rodzaju mapy i mogą występować zarówno w postaci analogowej jak i cyfrowej. Pomimo tego, że są one dwuwymiarową reprezentacją danego wycinka przestrzeni, posiadają podstawowe cechy modelu, którymi są m.in. skala, wpisanie w układ współrzędnych płaskich, orientacja przestrzenna i dokładność odwzorowania obiektu badań. Cechy map zapewniają ich kartometryczność, czyli zdolność wykorzystania ich właściwości geometrycznych do przeprowadzania pomiarów wielkości, takich jak długość elementów liniowych, pole powierzchni obszarów itp.

Niejednokrotnie, modele dwuwymiarowe jak np. mapy sytuacyjno-wysokościowe, posiadają zaimplementowane informacje o trzeciej współrzędnej przestrzennej – wysokości. Problem dwuwymiarowości takich modeli, sztucznie rozwiązano poprzez wprowadzenie izolinii wysokości (warstwic), bądź opisów wartości wysokości przypisanych do danego punktu sytuacyjnego (pikiety wysokościowe). Dzięki temu, możliwe jest analizowanie procesów zależnych od trzeciej zmiennej przestrzennej, posiadając jedynie model dwuwymiarowy. Rozwiązanie to, choć bardzo użyteczne jest często pewnym ograniczeniem. Trudno jest odtworzyć usytuowanie wysokościowe całości badanego obszaru w przypadku mniejszych różnic wysokości. Podczas analizy przebiegu warstwic bądź wysokości pikiet uwaga obserwatora skupiana jest jednocześnie na 2-3 miejscach, czyli lokalnie. W celu dokonania całościowej analizy rzeźby terenu, zwłaszcza na dużym obszarze, niejednokrotnie zachodzi potrzeba przejścia do modelu trójwymiarowego. W praktyce oznacza to sporządzenie tzw. Numerycznego Modelu Rzeźby Terenu (NMT).

## **METODY TWORZENIA NUMERYCZNYCH MODELI TERENU**

Pierwszym krokiem przy próbie stworzenia modelu NMT jest przede wszystkim ustalenie celu, do którego ma on być wykorzystany, a następnie dopasowanie do niego rodzaju modelu (rastrowy, wektorowy). Razem z wyborem rodzaju modelu, użytkownik decyduje się na związaną z nim metodę tworzenia modelu. Właśnie w tym miejscu widać podstawową różnicę między modelami rastrowymi i wektorowymi. Metody budowy Numerycznych Modeli Terenu, w zależności od rodzaju modelu opierają się na:

- łączeniu węzłów regularnej siatki – model wektorowy GRID,
- triangulacji punktów pomiarowych – model wektorowy TIN,
- zapisie wysokości punktów regularnej siatki pomiarowej w postaci macierzy (rastra), lub wykorzystaniu danych pomiarowych do interpolacji wysokości na analizowanym obszarze i zapisie w postaci siatki rastrowej GRID – model macierzowy.

## **TWORZENIE NMT W FORMIE WEKTOROWEJ OPARTYCH NA SIATKACH GRID I TIN**

W modelach wektorowych, danymi wejściowymi są współrzędne przestrzenne punktów pomiarowych. Punkty te mogą być umieszczone w przestrzeni

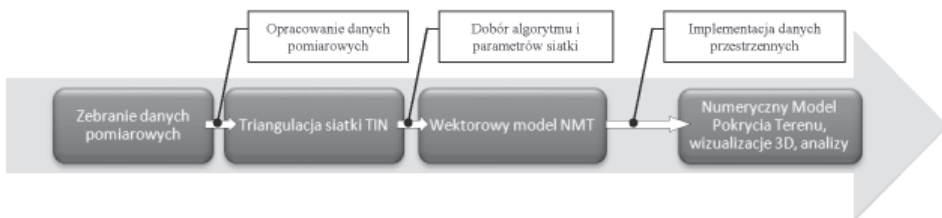
w sposób regularny lub rozproszony. W celu stworzenia wektorowego modelu NMT, należy utworzyć na ich podstawie siatkę GRID lub TIN, będącą reprezentacją powierzchni terenu. Punkty danych są węzłami siatki a jednocześnie końcami tworzących ją wektorów.

W przypadku siatki GRID, operacja wektoryzacji ogranicza się do połączenia punktów uszeregowanych w regularnej siatce kwadratów. Model TIN, podobnie jak w przypadku modelu GRID, jest modelem wektorowym utworzonym z wektoryzacji danych pomiarowych. Składa się on z nieregularnych trójkątów, których boki rozpięte są na punktach o znanych współrzędnych. Trójkąty tworzone są na podstawie procesu zwanego triangulacją.

Triangulacja jest to procedura tworzenia trójkątów, których wierzchołkami są punkty danych pomiarowych. Zasadą jest, że po dokonaniu triangulacji na pewnym zbiorze danych, żaden punkt nie może zostać niewykorzystany a boki trójkątów nie mogą się przecinać. Często mówi się, że musi zostać zachowanie kryterium Delaunay', które polega na takim dobraniu połączeń boków trójkątów, aby w okręgu opisanym na każdym z wybranych trójkątów, nie znajdował się żaden punkt znany. Poza spełnieniem powyższego kryterium, ważne jest, aby utworzone trójkąty były w miarę możliwości małe i regularne. Unika się stosowania trójkątów nadmiernie wydłużonych i o dużym kącie rozwarcia. Wynika to z potrzeby jak najwierniejszego oddania rzeczywistego kształtu powierzchni terenu, w którym ostre, wyraźnie zaznaczone krawędzie występują stosunkowo rzadko.

Podstawową cechą nieregularnych siatek trójkątów jest fakt, nierównomiernego rozmieszczenia punktów pomiarowych w przestrzeni. Pozwala to na występowanie obszarów o różnej gęstości danych. Rozkład przestrzenny danych oraz ich ilość, wpływa w znaczącym stopniu na sposób przeprowadzenia triangulacji, dobieranie parametrów trójkątów i ostatecznie na kształt skonstruowanej siatki. Czynniki te rzutuje, zatem na dokładność modelu i jego zgodność z rzeczywistym kształtem rzeźby terenu.

Powstawanie wektorowego modelu pokrycia terenu bazującego na siatce TIN, odbywa się w następujących etapach (rys. 1):



Źródło: opracowanie własne  
Source: own elaboration

**Rysunek 1.** Schemat etapów powstawania wektorowego modelu pokrycia terenu

**Figure 1.** Scheme of stages of creating vector model of covering terrain

Przed przystąpieniem do triangulacji i wyznaczeniem siatki trójkątów należy odpowiednio przygotować dane pomiarowe. Należy zastanowić się nad tym, czy do tworzenia siatki potrzebne będą wszystkie pomierzone dane. Nadmierne zagęszczenie danych pomiarowych, może wprowadzać do modelu dużą ilość mało wnoszących danych, bądź odwrotnie – niedostateczna ilość danych, może uniemożliwić utworzenie modelu o założonych wymogach dokładnościowych. Opracowanie danych pomiarowych jest szczególnie ważne, przy pomiarach wykonywanych metodą skaningu laserowego gdzie jednocześnie otrzymywana jest bardzo duża liczba punktów pomiarowych. Optymalizacja liczby punktów, musi być dostosowana do założonej dokładności modelu, oraz jego przeznaczenia. Wstępne opracowanie danych pomiarowych, ma na celu oszczędność czasu przetwarzania modelu, osiąganą przez dostosowanie stopnia skomplikowania geometrycznego siatki do potrzeb użytkownika, przy jak największej zgodności z rzeczywistym kształtem pomierzonej rzeźby terenu. W fazie wstępnej trzeba zwrócić uwagę na fakt, czy pomierzone zostały wszystkie charakterystyczne punkty rzeźby i linie szkieletowe. Pominięcie ich przy przygotowywaniu danych może doprowadzić do powstania różnic pomiędzy modelem a stanem faktycznym.

Kolejnym etapem tworzenia NMT jest utworzenie wektorowej siatki, opartej na zebranych danych pomiarowych. Siatkę TIN można utworzyć posługując się jednym z wielu algorytmów triangulacyjnych, opisanych szeroko w literaturze dotyczącej tego zagadnienia. Do najpopularniejszych metod triangulacji należą między innymi:

- metoda inkrementacyjna [Lee, Schachter, 1980],
- metoda „dziel i zwyciężaj” - ang. divide and conquer [Lee, Schachter, 1980],
- metoda „omiatania”(poszukiwanie cykliczne wokół punktu) – ang. radial sweep [Mirante, Weingarten, 1982],
- metoda hierarchiczna [Floriani, 1985],
- metoda „krok po kroku” – ang. step by step [McCullagh, Ross, 1980],
- metoda rekurencyjnego podziału - ang. recursive split [Lewis, Robinson 1978],
- metoda „usuń i buduj” – ang. incremental delete and build [Watson, 1981].

Metody te dzielą się na statyczne i dynamiczne. Pierwszy rodzaj wyróżnia się tym, że do obliczeń brany zostaje od razu cały zbiór danych wejściowych. Do tego grona zaliczają się metody: rekurencyjnego podziału, omiatanie i algorytm „divide and conquer” (dziel i zwyciężaj). W przeciwieństwie do nich, wyróżnia się metody dynamiczne, w których tworzenie trójkątów następuje w sposób krokowy. Oznacza to, że układ budowanej siatki jest „aktualizowany” na bieżąco wraz z dodawaniem do niej kolejnych punktów z tablicy danych wejściowych. Takimi cechami charakteryzują się metody: „krok po kroku”, inkre-

mentacyjna oraz metoda „incremental delete and build”. Wspólną cechą algorytmów triangulacyjnych, jest dążenie do minimalizacji czasu obliczeń, oszczędności zasobów pamięciowych oraz poprawności geometrycznej nowopowstałej sieci.

Ważnym elementem triangulacji, poza samym algorytmem jest dobór parametrów tworzonej siatki. Przede wszystkim należy dobrać optymalną długość boków tworzonych trójkątów oraz rozwartość ich kątów wewnętrznych. Parametry siatki są uzależnione od potrzeb użytkownika, zagęszczenia punktów pomiarowych oraz założonych wymogów dokładnościowych modelu. Pewną wskazówką przy konstruowaniu sieci, mogą być informacje zawarte w wytycznych technicznych K-2.8 – „Opracowanie ortofotomap w skali 1:10000” [2001]. Wspomniane wytyczne, opisują zastosowanie modeli NMT w połączeniu z ortofotomapami tworzonymi na podstawie zdjęć lotniczych. Podają one zalecany interwał siatki pomiarowej, dla opracowań wykonywanych w różnych skalach, w zależności od stopnia trudności terenu.

Tabela nr 1 opisuje zalecane odległości punktów pomiarowych, ułożonych w regularnej siatce kwadratów, które trzeba uwzględnić przy projektowaniu siatki TIN, w której punkty są rozłożone w sposób nieregularny. Wartości w tabeli należy traktować, jako maksymalne długości boków trójkąta siatki. Minima należy dobierać według potrzeb, metodą prób. Podobnie trzeba postępować w przypadku ustalania wartości kątów rozwarcia trójkątów. Większość programów do triangulacji, ustawia domyślną wartość minimalnego kąta, jako 22,5°. Ma to zapewnić brak nadmiernych zmian załamania powierzchni siatki. Wartości maksymalne można określać dowolnie według potrzeb, z unikaniem, w miarę możliwości, tworzenia trójkątów rozwartokątnych.

**Tabela 1.** Zalecana odległość między punktami regularnej siatki pomiarowej, w zależności od skali ortofotomapy i stopnia trudności terenu

**Table 1.** Recommended distance between points of regular measuring mesh, in dependence from scale of ortofotomap and degree of difficulty of terrain.

Stopień trudności terenu	Skala ortofotomapa				
	1:1000	1:2000	1:5000	1:10000	1:25000
	Mianownik skali zdjęć(Mz)				
	3000-5000	5000-8000	12000-18000	20000-30000	50000-60000
łatwy	5-10m	10-15m	15-20m	20-30m	30-50m
trudny	3-5m	5-10m	10-15m	15-20m	20-30m

Źródło: Wytyczne techniczne K-2.8, 2001

Source: Technical guidelines K-2.8, 2001

Utworzoną w wyniku triangulacji siatkę TIN można uznać za NMT lub wykorzystać jak podstawę do dalszej obróbki np. do interpolacji regularnej siatki kwadratów badanego obszaru. Utworzoną powierzchnię modelu należy

sprawdzić z punktu widzenia ewentualnych błędów triangulacji oraz przeprowadzić analizę dokładnościową.

Dokładność modelu NMT można utożsamić ze średnim błędem wysokości punktu wyznaczonego z powstałego modelu. Na uzyskaną dokładność mają wpływ błędy pomiarowe danych wejściowych, założona rozdzielczość modelu a także sama konfiguracja rzeźby analizowanego obszaru. Dokładność Numerycznego Modelu Terenu można wyznaczyć na podstawie empirycznego wzoru Ackermanna (1) [Wytyczne techniczne K-2.8, 2001]:

$$m_{\text{NMT}}^2 = m_z^2 + (\alpha \cdot d)^2 \quad (1)$$

gdzie:

$m_{\text{NMT}}$  - średni błąd wysokości wyinterpolowanej na podstawie modelu NMT,

$m_z$  - średni błąd określenia wysokości punktu,

$\alpha$  - współczynnik opisujący charakter rzeźby terenu

$d$  - średnia odległość punktów pomiarowych.

W powyższym wzorze Ackermanna mają zastosowanie następujące wartości czynnika  $\alpha$ :

-  $\alpha = 0,004 \div 0,007$  dla terenu łatwego (o gładkiej powierzchni),

-  $\alpha = 0,010 \div 0,020$  dla terenu o średniej trudności,

-  $\alpha = 0,022 \div 0,044$  dla terenu trudnego (nieregularne powierzchnie, strome zbocza).

Wytyczne K-2.8 mówią, że oczekiwaną wartość błędu średniego dla wyznaczenia wysokości punktu należy obliczać ze wzoru:

$$m_z = \pm \sqrt{m_{\text{NMT}}^2 - (\alpha \cdot d)^2} \quad (2)$$

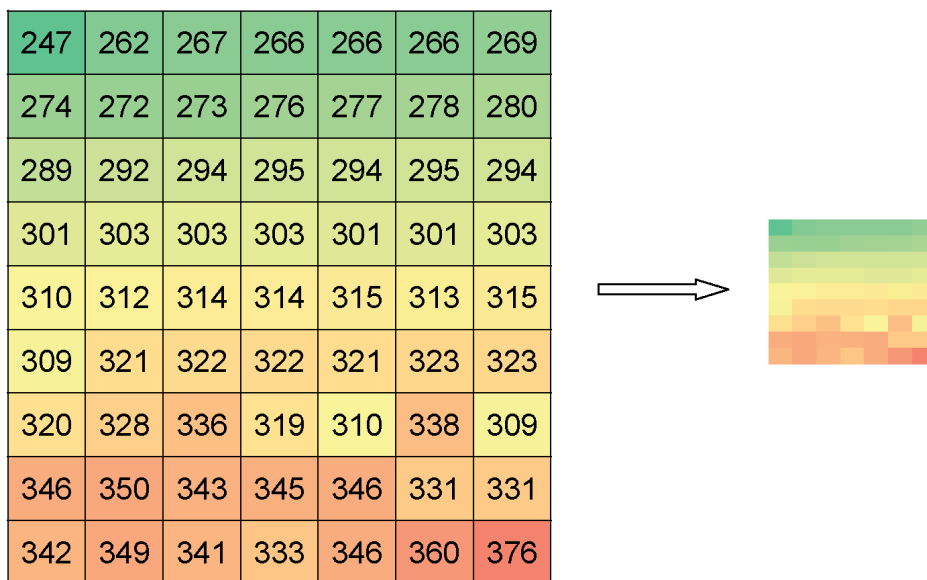
Otrzymana wartość nie może przekraczać 1/3 wielkości cięcia warstwicznego mapy, utworzonej na podstawie modelu NMT. Z reguły jest to docelowa skala opracowania modelu.

## **METODY INTERPOLACJI WYSOKOŚCI W MODELACH RASTROWYCH NA PODSTAWIE DANYCH POMIAROWYCH**

Modele macierzowe (Regular Raster Grid – rys. 2) nadają się przede wszystkim do wykonywania analiz hydrograficznych, hipsometrycznych, analiz związanych z ustalaniem zlewni rzek oraz sieci drenażowych.

Modele rastrowe przedstawiają „wysokościowy obraz” powierzchni terenu. Każdy piksel, lub inaczej komórka macierzy, stanowi zapis wysokości danego fragmentu terenu w rzeczywistości. W związku z powyższym, wymagają one danych wejściowych w formie punktów wysokościowych, rozplanowanych

przestrzennie w formie siatki. Wysokości przypisane są pikselom, o wybranych przez użytkownika rzeczywistych wymiarach terenowych. Wielkość terenowa piksela jest narzucana przez rozdzielczość poziomą modelu i założenia pomiarowe. Wartości rzędnej terenu stanowiące elementy macierzy modelu, mogą przedstawiać średnią wysokość wierzchołków oczka siatki lub wysokość jego punktu centralnego. Jeżeli punkty pomiarowe nie są uszeregowane w regularnej siatce pomiarowej, o oczku siatki identycznym jak rozdzielczość modelu, którą chcemy uzyskać, zachodzi potrzeba interpolacji wysokości na podstawie danych z pomiaru.



Źródło: opracowanie własne.  
Source: own elaboration.

**Rysunek 2.** Macierz modelu Regular Raster Grid zawierająca wysokości terenu. Wysokość elementów rastra przedstawiono kolorami jak na wizualizacji 2D tego obszaru (po prawej)

**Figure 2.** The matrix of Regular Raster Grid model containing elevations of terrain. Elevations of elements have been showed by colours as on 2D visualization of this area (on right)

Do popularnych metod interpolacyjnych w modelach GRID, stosowanych dziś w różnego typu oprogramowaniu związanym z analizami GIS należą między innymi:

- metoda najbliższego sąsiada,
- metoda naturalnego sąsiedztwa przy użyciu poligów Thiessen'a, kriging,
- interpolacja funkcjami sklejanymi (ang. spline, b-spline interpolation).

Pierwsza z wymienionych metod, choć najprostsza to wykorzystywana jest bardzo rzadko. Algorytm metody najbliższego sąsiada polega na obliczaniu odległości między punktem interpolowanym a punktami w zbiorze danych wejściowych. W przypadku modeli NMT, dane wysokościowe mogą być zapisane w postaci rastra lub współrzędnej wysokościowej (dla modeli wektorowych). Podstawową zasadą, a jednocześnie główną wadą tej metody jest przypisanie interpolowanemu punktowi wysokości najbliższego sąsiada. Prowadzi to do maksymalnego uproszczenia interpolacji, lecz jest mało efektywne i może prowadzić do powstania dużych rozbieżności w stosunku do rzeczywistej powierzchni terenu. Jak już wspomniano metoda ta jest bardzo rzadko stosowana w praktyce, służy głównie do zagęszczania braków w danych wejściowych i może być stosowana w przypadku regularnego rozmieszczenia punktów znanych.

Metoda naturalnego sąsiedztwa, podobnie jak poprzednia, wykorzystuje zależności pomiędzy odległościami punktów danych. Koncepcja zależności pomiędzy wartościami punktów danych a interpolowanych jest tutaj bardziej rozwinięta. Zauważono, że punkty dane, mogą wpływać na szukane wielkości tylko w pewnym otoczeniu. Granice takich strefowych wpływów, wyznaczyć można tworząc tzw. poligony Thiessena.

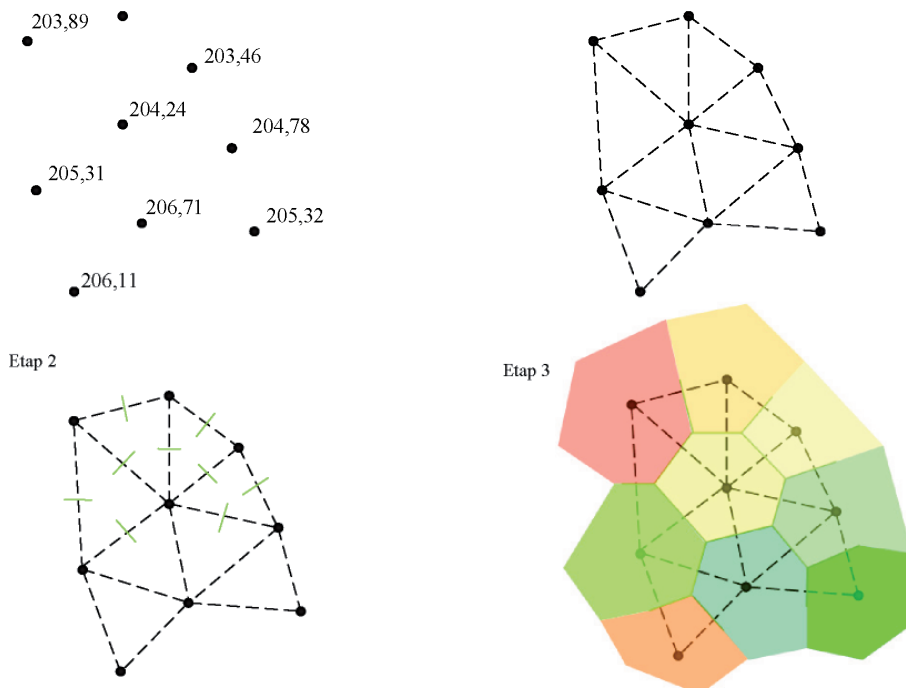
Poligonami nazywa się wielokąty zamknięte, wydzielone z otoczenia za pomocą zbioru prostych, wzajemnie przecinających się w wierzchołkach figury. Utworzenie poligonu Thiessena odbywa się na zasadzie geometrycznej i odbywa się na zbiorze danych wejściowych, np. pikiet wysokościowych. Zbiór taki przedstawiony jest na rysunku nr 3.

Przedstawia on zasadę powstawania poligonów Thiessena. Proces ten składa się z trzech etapów. Pierwszym etapem, jest triangulacja punktów danych zgodnie z kryterium Delaunay'a. Kryterium to zapewnia racjonalizację kształtu sieci i wyglądu trójkątów. Najlepiej spełnia się przy równomiernym rozproszeniu punktów w przestrzeni.

Drugim etapem jest utworzenie symetralnych do każdego z boków trójkątów utworzonej wcześniej sieci. W miejscach przecięć powstałych linii utworzone zostają wierzchołki poligonów Thiessena. Po ich połączeniu uzyskuje się powierzchnie, wewnątrz których punkty odznaczają się najmniejszą odległością w stosunku do punktu centralnego każdego z poligonów (etap trzeci). Punkty centralne są punktami należącymi do zbioru danych wejściowych, a zatem ich wartości nie są interpolowane. Dowolnemu punktowi położonemu wewnątrz powstałej „strefy” przypisuje się cechy płynące z obecności najbliższego sąsiada.

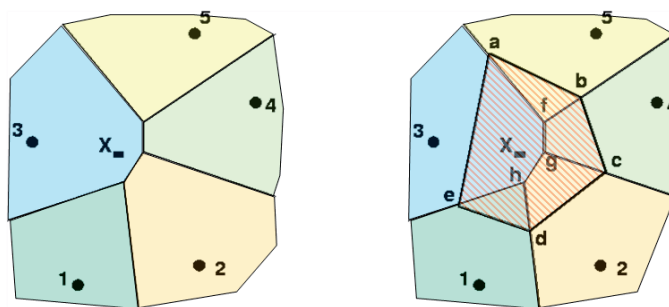
Po wstawieniu punktu, który ma zostać wyinterpolowany w otoczenie punktów znanych, tworzy się wokół niego nowy poligon Thiessena. Nowo utworzony obszar złożony jest z części przynależnych do poprzednio utworzonych poligonów. Obszary składające się na nowy poligon, pokazują wpływ znanych punktów na wyznaczany element. Można to zaobserwować na rysunku nr 4.





Źródło: opracowanie własne.  
Source: own elaboration.

**Rysunek 3.** Schemat etapów powstawania poligonów Thiessen  
**Figure 3.** Scheme of stages of creating Thiessen polygons



Źródło: [http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/nem/nem\\_intro/img29.png](http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/nem/nem_intro/img29.png)  
Source: [http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/nem/nem\\_intro/img29.png](http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/nem/nem_intro/img29.png)

**Rysunek 4.** Interpolacja wysokości w metodzie naturalnego sąsiedztwa na podstawie poligonów Thiessen'a  
**Figure 4.** The interpolation of height in method of natural neighbourhood based on Thiessen polygons

Wysokość nowego punktu (oznaczonego literą X) uzyskuje się, jako sumę iloczynów wag oraz wysokości punktów centralnych już istniejących poligonów Thiessena (1÷5). Wagą jest stosunek powierzchni części składowych nowego poligonu, do jego ogólnej powierzchni. Zgodnie z powyższym rysunkiem, wysokość interpolowanego punktu X będzie wyglądać następująco:

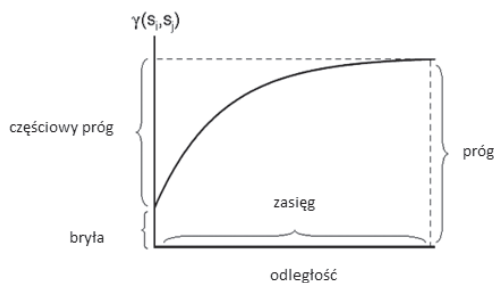
$$H_X = H_1 \cdot \left(\frac{P_{ehd}}{P_{abcde}}\right) + H_2 \cdot \left(\frac{P_{cdhg}}{P_{abcde}}\right) + H_3 \cdot \left(\frac{P_{afghs}}{P_{abcde}}\right) + H_4 \cdot \left(\frac{P_{bcfg}}{P_{abcde}}\right) + H_5 \cdot \left(\frac{P_{abf}}{P_{abcde}}\right) \quad (3)$$

Wzór (3) [Sibson, 1981] pokazuje, zatem, że wysokość punktu szukanego jest uzależniona zarówno od wysokości H centralnego punktu poligonów Thiessena oraz strefy ich wpływu, wyznaczonych we wstępnej fazie pracy algorytmu. Poligony Thiessena, zwane też diagramami Voronoi mają zastosowanie zarówno przy modelowaniu siatek rastrowych jak i wektorowych.

Kriging należy do geostatycznych metod interpolacji. Oznacza to, że działa on na zasadach stochastycznych, czyli bierze pod uwagę zmienność losową interpolowanej powierzchni. Interpolacja odbywa się na zasadzie znalezienia zależności statystycznej pomiędzy wartościami znanymi punktów w zbiorze danych, a wartością estymowaną punktu interpolowanego. Kriging korzysta z zależności pomiędzy odległością punktów, a stopniem ich zależności. Często zależność tą można przedstawić na wykresach zwanych semiwariogramami. Są one opisane kilkoma parametrami:

- wartością semiwariancji, czyli stopniem zależności ( $\gamma$ ),
- zakresem (range), po jego przekroczeniu semiwariancja jest wartością stałą,
- wartością progową  $\gamma$  (sill) na końcu zakresu,
- „nugget'em”, czyli zakres występowania dolnego szumu, występującego w słabej korelacji z danymi pomiarowymi. Jest to inaczej wartość semiwariancji dla odległości pomiędzy punktami znanymi, zmierzającej do zera.

Przykładowy semiwariogram przedstawiony został na rysunku 5.



Źródło: <http://www.plantmanagementnetwork.org/pub/ats/guide/2004/gis/image/weed2.gif>  
 Source: <http://www.plantmanagementnetwork.org/pub/ats/guide/2004/gis/image/weed2.gif>

**Rysunek 5.** Podstawowe parametry składowe semiwariogramu  
**Figure 5.** Basic parameters components of semivariogram

Wielkość  $\gamma$  można określić na podstawie wzoru nr (4), podanego przez Bachmaier'a i Backes'a (2008r.) We wzorze tym, „z” jest wielkością przypisaną do punktu znanego (np. wysokością punktu w modelu NMT), „h” jest odległością, w jakiej szukane są pary punktów podobnych, zaś  $n(h)$  to liczba par w przedziale zależnym od wybranej wartości h.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} (z(x_i + h) - z(x_i))^2 \quad (4)$$

Kriging pozwala na wyznaczenie najlepszego nieobciążonego estymatora liniowego wartości szukanej (ang. best linear unbiased estimator), który jest dany wzorem (5):

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n w_i(x_0) Z(x_i) \quad (5)$$

Estymator oszacowany na podstawie powyższego wzoru, w przypadku rozważań związanych z wysokością punktów w modelu NMT, jest sumą iloczynów wysokości punktów znanych ( $Z(x_i)$ ) oraz ich wag. Wymogi metod stochastycznych zakładają, że wagi, muszą spełnić warunek minimalizacji średniokwadratowego błędu estymacji (ang. kriging variance, kriging error):

$$\sigma_k^2(x_0) := \text{Var}(\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i(x_0) w_j(x_0) c(x_i, x_j) + \text{Var}(Z(x_0)) - 2 \sum_{i=1}^n w_i(x_0) c(x_i, x_0) \quad (6)$$

gdzie,  $c(x_i, x_0)$  to kowariancja pomiędzy położeniem punktu znanego i interpolowanego.

Oba równania, (5) oraz (6), pozwalają na zachowanie warunku nieobciążoności analizowanej próby punktów dla wartości oczekiwanej  $\mu(x) = E[Z(x)]$ :

$$E[\hat{Z}(x) - Z(x)] = \sum_{i=1}^n w_i(x_0) \mu(x_i) - \mu(x_0) = 0 \quad (7)$$

Wszystkie te warunki pozwalają na wyznaczenie optymalnych wartości wag, tak, aby zminimalizować błąd estymacji, będący różnicą między wartością oszacowaną a faktycznie występującą w rzeczywistości.

Interpolacja wysokości punktów metodą krigingu ma wiele odmian, które różnią się od siebie sposobem przyjmowania wartości oczekiwanej  $\mu(x)$ . Najczęściej spotykane odmiany tej metody to:

- kriging prosty (ang. simple kriging) przyjmujący  $\mu(x) = 0$ ,
- kriging zwykły (ang. ordinary kriging) według którego  $\mu(x) = \mu$ ,
- kriging uniwersalny (ang. universal kriging).

Kolejną metodą interpolacji powierzchni terenu na podstawie danych przestrzennych jest metoda opierająca się o wykorzystanie tzw. funkcji sklejanych. Algorytm interpolacyjny tej metody działa na zasadzie obliczania nieznanymi parametrów funkcji matematycznej określającej np. przybliżoną powierzchnię terenu, przy użyciu wielomianów niskiego stopnia. Sposób ten należy do rodziny interpolacji wielomianowych, dokonywanych w sposób numeryczny – uzyskana w wyniku interpolacji powierzchnia jest opisana matematycznie.

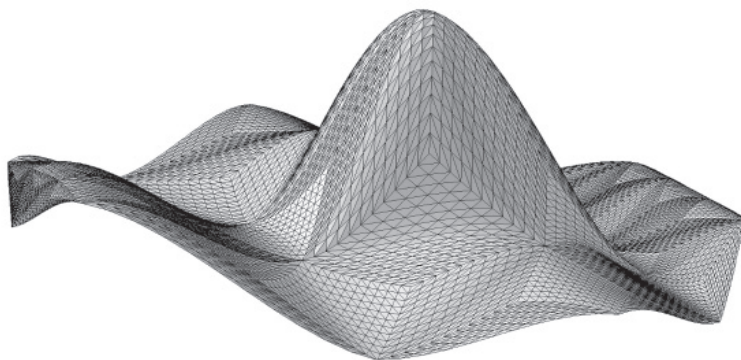
W matematyce funkcją typu spline (sklejaną) nazywa się taką funkcję rzeczywistą  $S$  o stopniu  $n$ , która, gdy jest określona w przedziale  $[a, b]$  spełnia warunki:

- w każdym przedziale  $[c, c_i] \in [a, b]$  jest wielomianem stopnia, co najwyżej  $s$ ,
- funkcja  $S$ , oraz jej pochodne o stopniu od 1 do  $n-1$  są ciągłe w przedziale  $[a, b]$ .

Zgodnie z powyższym, można wnioskować, że podstawowym założeniem tej metody jest zachowanie ciągłości funkcji oraz jej krzywizny. Interpolacja, odbywa się przy tym na zasadzie poszukiwania wielomianów opisujących płaszczyznę w wielu przedziałach  $[c, c_i]$ , będących częścią przedziału głównego  $[a, b]$ . Algorytm interpolacyjny musi także zapewniać racjonalizację parametru gładkości wyznaczonej funkcji.

W praktyce stosuje się kilka rodzajów metod opartych na wykorzystaniu funkcji sklejanych. Najczęściej spotykane typy takich funkcji to:

- funkcje kubiczne (stopnia  $m=3$ ),
- funkcje B-spline,
- krzywe Beziera (rys. 6).



Źródło: [http://git.zcu.cz/images/archive/5/59/20090811160210!Sextante\\_Sur2.png](http://git.zcu.cz/images/archive/5/59/20090811160210!Sextante_Sur2.png)  
Source: [http://git.zcu.cz/images/archive/5/59/20090811160210!Sextante\\_Sur2.png](http://git.zcu.cz/images/archive/5/59/20090811160210!Sextante_Sur2.png)

**Rysunek 6.** Powierzchnia utworzona przy pomocy interpolacji krzywymi Beziera  
**Figure 6.** Surface created by interpolation of Bezier curves

Interpolacja metodą funkcji sklepanych jest skuteczna ze względu na szerokie możliwości doboru sposobu kształtowania krzywych interpolacyjnych, co umożliwia jej zastosowanie w zależności od potrzeb użytkownika.

## PODSUMOWANIE

W dzisiejszym świecie, rozwój technologii i narzędzi, służących do opisywania otaczającej człowieka przestrzeni, przyczynia się do zmiany sposobu prezentacji danych pomiarowych. Coraz częściej, dla zastosowań inżynierskich i naukowych wykorzystuje się tworzenie trójwymiarowych modeli istniejącego świata. Ze względu na lepsze odwzorowanie ukształtowania pionowego, modelowanie powierzchni terenu staje się obecnie, preferowanym sposobem prezentacji przestrzeni, zwłaszcza dla celów projektowych. obiektów, związanych z rzeźbą, pozwala na wykorzystanie procesu modelowania w szeregu zastosowań praktycznych.

Integracja cyfrowych danych przestrzennych do modelu NMT, pozwalają na skonstruowanie Numerycznego Modelu Pokrycia Terenu. Implementacja informacji o położeniu i cechach obiektów, związanych z rzeźbą, pozwala na wykorzystanie procesu modelowania w szeregu zastosowań praktycznych.

## BIBLIOGRAFIA

- De Floriani L., Falcidieno B., Penovi C. 1985. *Delaunay-based representation of surfaces defined over arbitrarily shaped domains*. Computer Vision, Graphics and Image Processing; tom 32, wyd. Academic Press, San Diego, USA; str.127-140.
- Lee D., Schachter B. 1980. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation. *International Journal of Parallel Programming*, tom 9, nr 3, wyd. Springer Netherlands, Houten, Holandia; str. 219-242
- Lewis B., Robinson J. 1978. Triangulation of planar regions with applications. *The Computer Journal*, tom 21, wyd. Oxford University Press, Oxford, Wielka Brytania; str. 324-332
- McCullagh M., Ross C. 1980. Delaunay triangulation of a random data set for isarithmic mapping. *The Cartographic Journal*, tom 17, nr 2, wyd. Maney Publishing, Londyn, Wielka Brytania; str. 93-99
- Miller C., Laflamme R. 1958. The Digital Terrain Model: Theory an application. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, tom 24, nr 3, wyd. American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Bethesda, USA; str. 433-442
- Mirante A., Weingarten N. 1982. The Radial Sweep algorithm for constructing Triangulated Irregular Networks. *IEEE Computer Graphics and Applications*, tom 2, nr 3, wyd. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, USA; str. 11-21
- Sibson R. 1981. A brief description of natural neighbor interpolation. [w:] Barnett V. *Interpreting Multivariate Data*, wyd. John Wiley & Sons, Nowy Jork, USA; str. 21-36
- Watson D. 1981. Computing the n-dimensional Delaunay triangulation with application to Voronoi polytopes. *The Computer Journal*, tom 2, nr 24, wyd. Oxford University Press, Oxford, Wielka Brytania; str. 167-172
- Wytyczne i instrukcje techniczne

Wytyczne techniczne K-2.8. Zasady wykonywania ortofotomap w skali 1:10000. 2001, wyd.  
Główny Urząd Geodezji i Kartografii, Warszawa

Strony internetowe:

<http://www.plantmanagementnetwork.org/pub/ats/guide/2004/gis/image/weed2.gif>

[http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/nem/nem\\_intro/img29.png](http://dilbert.engr.ucdavis.edu/~suku/nem/nem_intro/img29.png)

Dr inż. Izabela Piech  
tel:(12) 662-45-31  
[rmpiech@cyf-kr.edu.pl](mailto:rmpiech@cyf-kr.edu.pl)

Dr inż. Bartosz Mitka  
[bartosz.mitka@ar.krakow.pl](mailto:bartosz.mitka@ar.krakow.pl)  
Katedra Geodezji Rolnej, Katastru i Fotogrametrii  
30-149 Kraków, ul.Balicka 253a