

Klemens Godek, Waldemar Krupiński

**WYKRYWANIE BŁĘDÓW SYSTEMATYCZNYCH
W POMIARACH WYKONYWANYCH PRECYZYJNYM
TEODOLITEM ELEKTRONICZNYM**

***DETECTION OF SYSTEMATIC ERRORS
IN MEASUREMENTS MADE
WITH PRECISE DIGITAL THEODOLITE***

Streszczenie

W celu sprawdzenia, czy w pomiarach kątowych wykonywanych teodolitem precyzyjnym „WILD T 2002” występują błędy systematyczne, wykonano szereg pomiarów kątowych na siatce testowej złożonej z trzech przylegających trójkątów, znajdujących się w pobliżu obiektów Wydziału Inżynierii Środowiska i Geodezji Uniwersytetu Rolniczego w Krakowie.

Występowanie błędów systematycznych może świadczyć o fakcie, że rozkład błędów pomiarowych nie jest rozkładem normalnym, co musiałoby skutkować inną metodą wyrównywania spostrzeżeń niż metoda najmniejszych kwadratów.

Wykonane pomiary w liczbie 35., poddano analizie statystycznej za pomocą testu Shapiro-Wilka.

Dla kontroli otrzymanych z powyższego testu wyników, przeprowadzono dodatkowe badania statystyczne metodami podanymi przez:

1. Kołmogorowa – statystyka D oraz D' .
2. Kuipera – statystyka V oraz V_1 .

Z przeprowadzonych badań wyciągnięto wnioski dotyczące przydatności testowanego instrumentu do wykonywania pomiarów kątowych.

Słowa kluczowe: badania testowe, statystyka matematyczna, testy zgodności, rozkład empiryczny, hipoteza statystyczna, dokładność użytkowa

Summary

In order to verify that the angular measurements performed with a precise theodolite "WILD T 2002" are burdened with systematic errors, numerous of angular measurements were performed in the test grid composed of three adjacent triangles, located near the Department of Environmental Engineering and Geodesy, University of Agriculture in Cracow.

The occurrence of systematic errors may indicate that the distribution of measurement errors is not normal. This would force a different way to compensate the observations than the least squares method.

Measurements made 35 times, were statistically analyzed using the Shapiro – Wilk test.

To control the results of test, additional statistics measurements were performed using the methods specified by:

- 1. Kolmogorow's – statistics D and D'*
- 2. Kuiper's – statistics V and V_1*

Performed analysis allows to draw conclusions regarding the suitability of the test instrument for angular measurements.

Key words: *test investigations, mathematical statistics, compatibility tests, empirical distribution, statistical hypothesis, usable accuracy*

WPROWADZENIE

Pomiary geodezyjne wykonywane są w przyziemnej warstwie atmosfery ziemskiej, gdzie występuje szkodliwe dla pomiarów zjawisko refrakcji ziemskiej. Wpływ refrakcji poziomej na pomiary geodezyjne jest trudny do określenia, a prowadzone badania dotyczące tego zagadnienia dają przybliżone wartości poprawek wpływające na dokładność pomiaru.

Błędy wynikające z wpływu środowiska na dokładność pomiarów kątowych szacuje się na $\pm 0,5''$, a dokładność pomiaru kąta odpowiadająca tej wartości została osiągnięta już w połowie ubiegłego stulecia przez precyzyjne teodolity optyczne.

Jak podaje [Lizończyk 2000] – błędy instrumentalne rzutujące na dokładność pomiarów kątowych są w nowych konstrukcjach teodolitów elektronicznych w dużym stopniu ograniczone. Wynika to z zastosowania dokładnych systemów podziałowych kół, doskonałej optyki, zastosowania do produkcji materiałów o najwyższej jakości oraz wykorzystanie elektroniki w systemach odczytowych.

Obecnie został osiągnięty taki stan precyzji w budowie teodolitów elektronicznych, że dokładność wykonania odczytu kierunku jest większa niż zakłócający wpływ środowiska [Piasek 2000], dlatego dalsze unowocześnianie konstrukcji teodolitów elektronicznych powinno iść w kierunku zwiększenia komfortu wykonywania pomiarów geodezyjnych.

Wyznaczenie i szacowanie dokładności użytkowej instrumentów geodezyjnych powinno być wykonywane na podstawie metod testowych określonych przez Normę Międzynarodową ISO 8322 [Pawłowski 1997].

Celem wykonywanych badań testowych będzie sprawdzenie czy w czasie wykonywania pomiarów kątowych nie występują błędy systematyczne. Do wykonania pomiarów badawczych zostanie użyty precyzyjny teodolit elektroniczny WILD T 2002 nr fabr. 337777, a kąty będą mierzone w jednej serii i dwóch położeniach lunety. Pomiary kątowe zostaną wykonane na założonej siatce testowej składającej się z trzech przylegających trójkątów (z 35-krotnym pomiarem kątów poziomych), a otrzymane wyniki zostaną poddane analizie za pomocą badań statystycznych trzema metodami podanymi przez:

1. Shapiro-Wilka statystyką W oraz W_d .
2. Kołmogorowa statystyką D oraz D' .
3. Kuipera statystyką V oraz V' .

BADANIA STATYSTYCZNE

Wyżej omówione pomiary zostały opracowane statystycznie z punktu widzenia ewentualnego występowania w nich błędów systematycznych, które należałoby usunąć przed wyrównaniem pomiarów metodą najmniejszych kwadratów.

W tym celu przeprowadzono badania za pomocą trzech statystycznych testów zgodności, a mianowicie:

1. testem Shapiro-Wilka [Greń 1970].
2. statystyką D oraz D' Kołmogorowa [Kasietczuk 1993].
3. statystyką V oraz V' Kuipera [Kasietczuk 1993].

Błędy prawdziwe pomierzonych kątów zawiera tabela 1.

Tabela 1. Błędy zamknięć trójkątów sieci bazowej

| Nr trójkąta j | Błąd zamknięcia trójkąta x_j ["] | Nr trójkąta j | Błąd zamknięcia trójkąta x_j ["] |
|--------------------|---------------------------------------|--------------------|---------------------------------------|
| 1 | -15,30 | 19 | 0,30 |
| 2 | -14,80 | 20 | 2,10 |
| 3 | -14,50 | 21 | 3,30 |
| 4 | -13,20 | 22 | 4,50 |
| 5 | -12,50 | 23 | 4,70 |
| 6 | -11,00 | 24 | 6,30 |
| 7 | -9,30 | 25 | 7,80 |
| 8 | -8,10 | 26 | 8,60 |
| 9 | -7,20 | 27 | 10,20 |
| 10 | -6,80 | 28 | 10,20 |
| 11 | -6,30 | 29 | 12,40 |

| Nr trójkąta j | Błąd zamknięcia trójkąta x_j ["] | Nr trójkąta j | Błąd zamknięcia trójkąta x_j ["] |
|--------------------|---------------------------------------|--------------------|---------------------------------------|
| 12 | -5,80 | 30 | 12,70 |
| 13 | -4,60 | 31 | 14,30 |
| 14 | -2,50 | 32 | 15,10 |
| 15 | -1,80 | 33 | 16,60 |
| 16 | -0,60 | 34 | 17,00 |
| 17 | 0,00 | 35 | 17,50 |
| 18 | 0,00 | | |

ad 1. test Shapiro-Wilka

Statystyka testowa określona jest wzorem [Ney B. 1970]:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i(n) \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right)^2}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}; \quad i = 1, \dots, \frac{35-1}{2} = 1, \dots, 17 \quad (1)$$

gdzie:

x_j – wartość elementów

$a_i(n)$ – stałe zależne od liczebności próbki oraz wartości i .

jeżeli wartość W_d statystyki W leży poza przedziałem $\left\langle W\left(\frac{1}{2}\alpha; n\right); W\left(1-\frac{1}{2}\alpha; n\right) \right\rangle$, hipotezę o normalności rozkładu błędów pomiarowych należy odrzucić na poziomie istotności α [Krysicki i in. 1986].

Obliczenia do testu zawiera tabela 2.

Tabela 2. Obliczenia do testu Shapiro-Wilka

| Nr | $x_{n-i+1} - x_i$ | $a_i(n)$ | $a_i(n) \cdot (x_{n-i+1} - x_i)$ | $x_j - \bar{x}$ | | | |
|-----|-------------------|----------|----------------------------------|-----------------|----------|-----|---------|
| 1. | 32,8 | 0,4096 | 13,4349 | 1. | -16,1371 | 18. | -0,8371 |
| 2. | 31,8 | 0,2834 | 9,0121 | 2. | -15,6371 | 19. | -0,5371 |
| 3. | 31,1 | 0,2427 | 7,5480 | 3. | -15,3371 | 20. | 1,2629 |
| 4. | 28,3 | 0,2127 | 6,0194 | 4. | -14,0371 | 21. | 2,4629 |
| 5. | 26,8 | 0,1883 | 5,0464 | 5. | -13,3371 | 22. | 3,6629 |
| 6. | 23,7 | 0,1673 | 3,9650 | 6. | -11,8371 | 23. | 3,8629 |
| 7. | 21,7 | 0,1487 | 3,2268 | 7. | -10,1371 | 24. | 5,4629 |
| 8. | 18,3 | 0,1317 | 2,4101 | 8. | -8,9371 | 25. | 6,9629 |
| 9. | 17,4 | 0,1160 | 2,0184 | 9. | -8,0371 | 26. | 7,7629 |
| 10. | 15,4 | 0,1013 | 1,5600 | 10. | -7,6371 | 27. | 9,3629 |
| 11. | 14,1 | 0,0873 | 1,2309 | 11. | -7,1371 | 28. | 9,3629 |

| | | | | | | | |
|---------------------------|------|--------|--------|-----|---------|-----|---------|
| 12. | 12,1 | 0,0739 | 0,8942 | 12. | -6,6371 | 29. | 11,5629 |
| 13. | 9,3 | 0,0610 | 0,5673 | 13. | -5,4371 | 30. | 11,8629 |
| 14. | 7,0 | 0,0484 | 0,3388 | 14. | -3,3371 | 31. | 13,4629 |
| 15. | 5,1 | 0,0361 | 0,1841 | 15. | -2,6371 | 32. | 14,2629 |
| 16. | 2,1 | 0,0239 | 0,0044 | 16. | -1,4371 | 33. | 15,7629 |
| 17. | 0,0 | 0,0119 | 0,0000 | 17. | -0,8371 | 34. | 16,1629 |
| $\sum_{i=1}^{17} 57,4609$ | | | | | | 35. | 16,6629 |

$$\left[\sum_j a_i(n) \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2 = 3301,7550; \quad \sum_j (x_j - \bar{x})^2 = 3503,5217$$

$$W_d = \frac{3301,7550}{3503,5217} = 0,942$$

Dla $\alpha = 0,05$ z tablic Shapiro-Wilka:

$$W\left(\frac{1}{2}\alpha; n\right) = W(0,025; 35) = 0,920$$

$$W\left(1 - \frac{1}{2}\alpha; n\right) = W(0,975; 35) = 0,989$$

Ponieważ obliczona wartość $W_d = 0,942$ należy do przedziału $\langle 0,920; 0,989 \rangle$ zachodzi brak podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu badanych błędów pomiarów kątowych.

ad 2. Statystyka D' Kolmogorowa

Jej wartość znajduje się, stosując wzory:

$$D^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - z_i \right] \quad (2)$$

$$D^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left[z_j - \frac{(i-1)}{n} \right] \quad (3)$$

$$D = \max(D^+, D^-) \quad (4)$$

$$D' = \left(\sqrt{n} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{n}} \right) \cdot D \quad (5)$$

Obliczenia zawiera tabela 3.

Tabela 3. Obliczenia do statystyk Kołmogorowa oraz Kuipera

| n | x_i ["] | $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$ | $z_i = F(u_i)$ | i/n | (i-1)/n | i/n- z_i D^+ | $z_i - (i-1)/n$ D^- |
|----------|-----------|--------------------------------|-----------------|---------------------|---------------------------------|----------------|---------|---------|---------------------|--------------------------|
| 1 | -15,30 | 0,8371 | -16,1371 | 260,4074 | -1,6129 | 0,0537 | 0,0286 | 0,0000 | -0,0251 | 0,0537 |
| 2 | -14,80 | 0,8371 | -15,6371 | 244,5202 | -1,5629 | 0,0594 | 0,0571 | 0,0286 | -0,0023 | 0,0308 |
| 3 | -14,50 | 0,8371 | -15,3371 | 235,2280 | -1,5329 | 0,063 | 0,0857 | 0,0571 | 0,0227 | 0,0059 |
| 4 | -13,20 | 0,8371 | -14,0371 | 197,0414 | -1,4030 | 0,0808 | 0,1143 | 0,0857 | 0,0335 | -0,0049 |
| 5 | -12,50 | 0,8371 | -13,3371 | 177,8794 | -1,3330 | 0,0918 | 0,1429 | 0,1143 | 0,0511 | -0,0225 |
| 6 | -11,00 | 0,8371 | -11,8371 | 140,1180 | -1,1831 | 0,119 | 0,1714 | 0,1429 | 0,0524 | -0,0239 |
| 7 | -9,30 | 0,8371 | -10,1371 | 102,7617 | -1,0132 | 0,1562 | 0,2000 | 0,1714 | 0,0438 | -0,0152 |
| 8 | -8,10 | 0,8371 | -8,9371 | 79,8725 | -0,8933 | 0,1867 | 0,2286 | 0,2000 | 0,0419 | -0,0133 |
| 9 | -7,20 | 0,8371 | -8,0371 | 64,5957 | -0,8033 | 0,2119 | 0,2571 | 0,2286 | 0,0452 | -0,0167 |
| 10 | -6,80 | 0,8371 | -7,6371 | 58,3260 | -0,7633 | 0,2236 | 0,2857 | 0,2571 | 0,0621 | -0,0335 |
| 11 | -6,30 | 0,8371 | -7,1371 | 50,9388 | -0,7134 | 0,2389 | 0,3143 | 0,2857 | 0,0754 | -0,0468 |
| 12 | -5,80 | 0,8371 | -6,6371 | 44,0517 | -0,6634 | 0,2546 | 0,3429 | 0,3143 | 0,0883 | -0,0597 |
| 13 | -4,60 | 0,8371 | -5,4371 | 29,5625 | -0,5434 | 0,2946 | 0,3714 | 0,3429 | 0,0768 | -0,0483 |
| 14 | -2,50 | 0,8371 | -3,3371 | 11,1365 | -0,3335 | 0,3707 | 0,4000 | 0,3714 | 0,0293 | -0,0007 |
| 15 | -1,80 | 0,8371 | -2,6371 | 6,9545 | -0,2636 | 0,3974 | 0,4286 | 0,4000 | 0,0312 | -0,0026 |
| 16 | -0,60 | 0,8371 | -1,4371 | 2,0654 | -0,1436 | 0,4443 | 0,4571 | 0,4286 | 0,0128 | 0,0157 |
| 17 | 0,00 | 0,8371 | -0,8371 | 0,7008 | -0,0837 | 0,4681 | 0,4857 | 0,4571 | 0,0176 | 0,0110 |
| 18 | 0,00 | 0,8371 | -0,8371 | 0,7008 | -0,0837 | 0,4681 | 0,5143 | 0,4857 | 0,0462 | -0,0176 |
| 19 | 0,30 | 0,8371 | -0,5371 | 0,2885 | -0,0537 | 0,4801 | 0,5429 | 0,5143 | 0,0628 | -0,0342 |
| 20 | 2,10 | 0,8371 | 1,2629 | 1,5948 | 0,1262 | 0,5517 | 0,5714 | 0,5429 | 0,0197 | 0,0088 |
| 21 | 3,30 | 0,8371 | 2,4629 | 6,0657 | 0,2462 | 0,5987 | 0,6000 | 0,5714 | 0,0013 | 0,0273 |
| 22 | 4,50 | 0,8371 | 3,6629 | 13,4165 | 0,3661 | 0,6443 | 0,6286 | 0,6000 | -0,0157 | 0,0443 |
| 23 | 4,70 | 0,8371 | 3,8629 | 14,9217 | 0,3861 | 0,6517 | 0,6571 | 0,6286 | 0,0054 | 0,0231 |
| 24 | 6,30 | 0,8371 | 5,4629 | 29,8428 | 0,5460 | 0,7088 | 0,6857 | 0,6571 | -0,0231 | 0,0517 |
| 25 | 7,80 | 0,8371 | 6,9629 | 48,4814 | 0,6959 | 0,758 | 0,7143 | 0,6857 | -0,0437 | 0,0723 |
| 26 | 8,60 | 0,8371 | 7,7629 | 60,2620 | 0,7759 | 0,7823 | 0,7429 | 0,7143 | -0,0394 | 0,0680 |
| 27 | 10,20 | 0,8371 | 9,3629 | 87,6631 | 0,9358 | 0,8264 | 0,7714 | 0,7429 | -0,0550 | 0,0835 |
| 28 | 10,20 | 0,8371 | 9,3629 | 87,6631 | 0,9358 | 0,8264 | 0,8000 | 0,7714 | -0,0264 | 0,0550 |
| 29 | 12,40 | 0,8371 | 11,5629 | 133,6997 | 1,1557 | 0,877 | 0,8286 | 0,8000 | -0,0484 | 0,0770 |
| 30 | 12,70 | 0,8371 | 11,8629 | 140,7274 | 1,1857 | 0,883 | 0,8571 | 0,8286 | -0,0259 | 0,0544 |
| 31 | 14,30 | 0,8371 | 13,4629 | 181,2485 | 1,3456 | 0,9115 | 0,8857 | 0,8571 | -0,0258 | 0,0544 |
| 32 | 15,10 | 0,8371 | 14,2629 | 203,4291 | 1,4256 | 0,9236 | 0,9143 | 0,8857 | -0,0093 | 0,0379 |
| 33 | 16,60 | 0,8371 | 15,7629 | 248,4677 | 1,5755 | 0,9429 | 0,9429 | 0,9143 | 0,0000 | 0,0286 |
| 34 | 17,00 | 0,8371 | 16,1629 | 261,2380 | 1,6155 | 0,9474 | 0,9714 | 0,9429 | 0,0240 | 0,0045 |
| 35 | 17,50 | 0,8371 | 16,6629 | 277,6508 | 1,6654 | 0,9525 | 1,0000 | 0,9714 | 0,0475 | -0,0189 |
| Σ | 29,30 | 29,3000 | 0,0000 | 3503,5217 | 0,0000 | 17,4491 | 18,0000 | 17,0000 | 0,5509 | 0,4491 |

$$D^+ = 0,0883$$

$$D^- = 0,0835$$

$$D = \max(D^+, D^-) = 0,0883$$

$$S^2 = 100,1006$$

$$\sigma(X) = 10,0050$$

$$D' = \left(\sqrt{n} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{n}} \right) \cdot D = \left(\sqrt{35} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{35}} \right) \cdot 0,0883 = 0,534$$

$$\text{Dla } \alpha = 0,05 : D'_{\text{krytyczne}} = 0,896 > 0,534 = D'$$

Ponieważ test jest prawostronny, powyższa nierówność świadczy o normalnym rozkładzie błędów pomiarowych, a więc też o poprawności działania testowanego teodolitu.

ad 3. Statystyka V oraz V' Kuipera

Wartości tych statystyk oblicza się ze wzorów [Kasietczuk 1993]:

$$V = D^+ + D' \quad (6)$$

$$V_1 = \left(\sqrt{n} + 0,05 + \frac{0,82}{\sqrt{n}} \right) \cdot V \quad (7)$$

gdzie D^+ oraz D^- według wzorów statystyki Kołmogorowa [Kasietczuk 1993; Krywicki i in. 1986].

Obliczenia:

$$V = D^+ + D' = 0,1718$$

$$V_1 = \left(\sqrt{35} + 0,05 + \frac{0,82}{\sqrt{35}} \right) \cdot 0,1718 = 1,049$$

$$\text{Dla } \alpha = 0,05 : D'_{1\text{krytyczne}} = 1,489 > 1,049 = V_1$$

Ponieważ test jest prawostronny, nierówność ta świadczy o fakcie normalności rozkładu błędów pomiarowych.

WNIOSKI

1. Badania przeprowadzone testem zgodności Shapiro-Wilka wykazały, że empiryczny rozkład błędów (na poziomie istotności $\alpha = 0,05$) jest rozkładem normalnym, a więc badany teodolit w pełni nadaje się do pomiarów kątowych.

2. Dodatkowo, dla kontroli wyników testu Shapiro-Wilka, przeprowadzone obliczenia statystyki:

a) D oraz D' Kołmogorowa,

b) V oraz V' Kuipera potwierdziły słuszność hipotezy (na poziomie istotności $\alpha = 0,05$) o normalnym rozkładzie błędów pomiarowych, czyli że instrument nie wykazuje istnienia błędów systematycznych, które zniekształcałyby pomiary.

BIBLIOGRAFIA

- Greń J. *Modele i zadania statystyki matematycznej*. PWN, Warszawa 1970.
- Kasietczuk B. *Analiza statystyczna geodezyjnej sieci testowej „Kortowo 2”*. Zesz. Nauk. AR-T, Olsztyn 1993.
- Krysicki W. i in. *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*. Cz. II. Statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1986.
- Lizończyk M. *Nominalna dokładność instrumentów pomiarowych a ich dokładność użytkowa, rozważania związane z lekturą normy PN/ISO 8322*. Przegląd Geodezyjny Nr 3, Warszawa 2000.
- Ney B. *Kryteria zgodności rozkładów empirycznych z modelami*. Zesz. Nauk. PAN, Geodezja 7, Kraków 1970.
- Pawłowski W. *Procedury ustalania dokładności użytkowej instrumentów pomiarowych według nowej Polskiej Normy PN/ISO 8322*. Przegląd Geodezyjny Nr 2. Warszawa 1997.
- Piasek Z. *Geodezja budowlana dla inżynierii środowiska*. Zesz. Nauk. PK, Kraków 2000.

Dr hab. inż. Waldemar Krupiński, prof. UR
Katedra Geodezji
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
ul. Balicka 253a
30-198 Kraków
tel.: +4812 6624512

Dr inż. Klemens Godek
Katedra Geodezji
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
ul. Balicka 253a
30-198 Kraków
e-mail: rmgodek@cyf-ke.edu.pl
tel.: +4812 6624540

Recenzent: *Prof. dr hab. inż. Ryszard Hycner*